

N° d'ordre : 2157

THÈSE

présentée à

L'Université de Bordeaux I

par

NICOLAS DECOSTER

pour obtenir le grade de

Docteur

spécialité : Informatique

Analyse multifractale d'images de surfaces rugueuses à l'aide de la transformation en ondelettes

Soutenue le : 17 novembre 1999

Devant la commission d'examen formée de :

MM	J.-P. ANTOINE	Professeur, Université Catholique de Louvain	Rapporteur
	A. ARNEODO	Directeur de recherche, CNRS	Directeur
	J.-P. BRAQUELAIRE	Professeur, Université de Bordeaux I	
	J.-M. CHASSERY	Directeur de recherche, CNRS	Rapporteur
	S. MALLAT	Professeur, École Polytechnique	
	M. NAJIM	Professeur, Université de Bordeaux I	Président

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Alain Arneodo, mon directeur de thèse, pour la qualité de son encadrement scientifique et pour son exceptionnelle disponibilité. Sans lui, rien n'aurait été possible.

Je remercie aussi tout particulièrement Stéphane Roux dont la contribution au présent travail est inestimable et avec qui j'ai eut un grand plaisir à travailler malgré l'océan qui nous séparait.

Je suis reconnaissant à Jean-Pierre Antoine et Jean-Marc Chassery d'avoir accepté la charge de juger le manuscrit de thèse, ainsi qu'à Jean-Pierre Braquelaire, Stéphane Mallat et Mohamed Najim pour leur participation au jury.

Que les personnes suivantes soient remerciées pour leur contribution plus ou moins directe aux développements algorithmiques ou logiciels nécessaires au travail de recherche : Jérôme Arrault, Benjamin Audit, Emmanuel Bacry, Anthony Davies, Geoff Davies, Jérôme Fraieu, Jean-François Muzy, Stéphane Roux et François Tallet.

Enfin, je désire témoigner ma gratitude aux personnes qui ont croisé mon chemin lors de mon passage au Centre de Recherche Paul Pascal pour ce qu'elles m'ont apporté au niveau scientifique et surtout au niveau humain.

Déployez à plat le relief de la Suisse et calculez la superficie ainsi obtenue.

Un mot pour un autre
Jean Tardieu

Avant propos

En 1951 Jean Tardieu, poète de l'absurde, demande à ses élèves imaginaires de calculer la surface que ferait la Suisse si elle était mise à plat [1]. Il va sans dire qu'une telle requête n'appelait pas de réponse. Cependant, en élève zélé, Mandelbrot ne peut s'empêcher de prendre cette question au sérieux, et dans les années 70 il introduit la notion de fractale [2, 3]. L'originalité des objets fractals est le fait qu'ils ne possèdent pas d'échelle de longueur caractéristique : ces objets, qui sont très irréguliers, présentent des détails à toute échelle, ce qui explique les difficultés rencontrées pour les caractériser. Mathématiquement, cette propriété d'autosimilarité se définit par l'invariance (éventuellement au sens statistique) de l'objet par un certain nombre d'opérations de similitude qui sont essentiellement des compositions de translations, rotations et dilatations [2-4]. Un des plus grands mérites de Mandelbrot est d'avoir su reconnaître que de nombreuses structures ou dynamiques complexes multiéchelles observées dans de nombreux domaines des sciences fondamentales et appliquées, pouvaient être appréhendées au sein d'un cadre fédérateur basé sur les notions de fractale et d'invariance d'échelle. Il est incontestable que le succès de ses différents ouvrages [2, 3] a donné un nouvel élan expérimental à de nombreuses branches de la physique, de la chimie, de la biologie, de la géologie, de la météorologie ou des sciences des matériaux [5-21]. Toutefois, pendant des années, les théoriciens comme les expérimentateurs ont dû faire face aux insuffisances des mathématiques qui offraient le seul concept de dimension fractale comme outil de caractérisation.

Au milieu des années 80 est apparu un nouvel outil mathématique particulièrement puissant en analyse du signal : la transformation en ondelettes [22-37]. Ce moyen d'analyse, introduit par deux chercheurs français, Morlet et Grossmann [22, 23], dans le but d'étudier des signaux sismiques, consiste à décomposer un signal sur un ensemble de fonctions caractérisées à la fois par un paramètre de position et par un paramètre d'échelle. La trans-

formation en ondelettes étend l'analyse spectrale puisqu'elle permet une description dans les échelles tout en révélant des informations de nature spatiale. Les objets fractals étant caractérisés par des propriétés locales d'invariance d'échelle, ils constituent tout naturellement un domaine d'application privilégié de l'analyse en ondelettes. Il n'est donc pas surprenant que dès l'avènement de cette nouvelle technique en analyse du signal, certains physiciens théoriciens [33, 35] aient immédiatement songé à examiner les objets fractals sous l'optique du microscope « transformation en ondelettes ». Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage écrit par Arneodo et ses collaborateurs [33], qui relate les avancées les plus spectaculaires effectuées grâce à ce microscope mathématique dans des domaines aussi variés que la turbulence pleinement développée, les phénomènes de croissance fractale, les séquences d'ADN, les signaux financiers ou les signaux médicaux.

D'un point de vue théorique, l'apport de la transformation en ondelettes a été décisif dans l'élaboration des fondements d'une théorie statistique des distributions fractales [38]. En effet, la souplesse d'utilisation et la liberté de choix de la forme de l'ondelette analytique, c'est-à-dire la possibilité de jouer sur l'optique de ce microscope mathématique, ont permis de généraliser le formalisme multifractal [39–44], introduit originellement pour décrire statistiquement la complexité des mesures singulières (mesures invariantes de systèmes dynamiques chaotiques [39–44], mesures intermittentes générées par des processus de cascade en turbulence pleinement développée [42]), aux fonctions singulières et plus généralement aux distributions. Véritable thermodynamique des fractales, ce formalisme permet de quantifier statistiquement les fluctuations de régularité de ces objets irréguliers par l'intermédiaire de spectres continus d'exposants (tel que le spectre des singularités) qui sont les équivalents, pour les fractales, des potentiels thermodynamiques énergie libre et entropie [45, 46]. La mise en œuvre, au début des années 90, de la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO) par Arneodo, Bacry et Muzy [46–50], a été une étape théorique et technologique importante ; désormais la communauté scientifique se trouve dotée d'algorithmes performants de calcul de ces spectres multifractals[†]. Toutefois, il est important de préciser que les logiciels existants, ainsi que la méthodologie sous-jacente, concernent uniquement l'analyse de signaux 1D. Comme cela est explicitement déclaré dans la conclusion de la Réf. [33], la généralisation de la méthode MMTO en 2D, avec comme perspective de nombreuses applications en analyse et traitement de l'image, constitue un des objectifs majeurs pour la fin de cette décennie. C'est à cette tâche que nous avons consacré tous nos efforts durant ces trois années de thèse.

Ce mémoire présente les fondements théoriques, la mise en œuvre numérique et l'application à l'analyse statistique de surfaces rugueuses multifractales synthétiques comme expérimentales, de la méthode MMTO 2D. Il est décomposé en quatre chapitres que nous avons rédigé dans un souci d'autoconsistance et de complémentarité. Ainsi, dans chacun de ces chapitres, une section introductive plutôt détaillée est consacrée à présenter l'état des connaissances, les objectifs et perspectives ainsi que la logique de notre démarche, ce qui explique le contenu plutôt succinct de cet avant-propos. Le chapitre 1 est un chapitre

[†]Voir, entre autre, le site du logiciel **LastWave** à l'URL : <http://www.cmap.polytechnique.fr/~bacry/LastWave/index.html>.

à caractère technique : il traite essentiellement de problèmes d'optimisation des coûts de calcul des produits de convolution nécessaires au calcul de la transformée en ondelettes (1D et 2D). Dans le chapitre 2, à caractère plutôt théorique, nous présentons la méthode MMTO 2D. Au delà des concepts théoriques, nous détaillons avec soins, la mise en œuvre numérique de cette méthodologie que nous testons sur des cas d'école de surfaces rugueuses monofractales. Le chapitre 3 est dédié à la validation de cette méthode sur des surfaces rugueuses multifractales synthétiques. Ce chapitre présente un double intérêt, d'une part au niveau de l'analyse et d'autre part au niveau de la synthèse d'images. Disposant d'une méthodologie éprouvée, nous pouvons alors envisager de l'utiliser pour une première application à des données expérimentales. Le chapitre 4 rapporte les résultats de l'application de la méthode MMTO 2D à l'analyse d'images satellites de nuages fournies par la NASA. Nous terminons ce mémoire en évoquant, dans le chapitre 5, la grande variété des domaines d'application potentiels de la technologie MMTO 2D. De même, nous suggérons quelques améliorations et ouvertures possibles de la conduite de la méthode MMTO 2D ainsi que de l'exploitation de l'information espace-échelles contenue dans le squelette de la transformée en ondelettes.

Table des matières

1	Aspects numériques et algorithmiques	1
1.1	Transformation de Fourier	2
1.1.1	Définitions, propriétés et exemples	2
1.1.2	Échantillonnage et périodisation	4
1.1.3	Algorithmes de calcul de la transformée de Fourier	6
1.2	Produit de convolution	13
1.2.1	Cas continu	13
1.2.2	Cas discret	14
1.2.3	Conventions et notations	14
1.2.4	Effets de bords	15
1.2.5	Algorithmes classiques de convolution et complexité	16
1.2.6	Convolution par morceaux	19
1.2.7	Filtre sous forme analytique	20
1.2.8	Complexe-réel	23
1.2.9	Comparaison des méthodes : temps de calcul	24
1.2.10	Comparaison des méthodes : erreur	29
1.3	Transformation en ondelettes de signaux 1D	31
1.3.1	Définition	32
1.3.2	Ondelette : filtre à taille variable	33
1.3.3	Gamme d'échelles accessible	33
1.3.4	Exemples d'ondelettes pour le calcul numérique	34
1.4	Algorithmes pour les images numérisées	35
1.4.1	Transformation de Fourier à deux dimensions	35
1.4.2	Convolution à deux dimensions	36
1.4.3	Transformée en ondelettes continue à deux dimensions	37
1.5	Petit récapitulatif	38
2	Méthode MMTO 2D : méthodologie et tests	41
2.1	Introduction	41
2.2	Traitement et analyse d'image par transformation en ondelettes continue 2D	45
2.2.1	Transformation en ondelettes continue 2D	45
2.2.2	Quelques exemples d'ondelettes analysatrices	47
2.2.3	Ondelettes analysatrices pour la détection multiéchelle de contours	48

2.3	Étude de la régularité locale par les MMTO 2D	51
2.3.1	Régularité globale et locale des fonctions fractales	51
2.3.2	Analyse en ondelettes 2D de la régularité locale d'une image	54
2.3.3	Détection des singularités par les maxima du module de la transformée en ondelettes	57
2.4	La méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes 2D	68
2.4.1	Méthodologie	69
2.4.2	Densités de probabilité	72
2.4.3	Mise en œuvre numérique	74
2.5	Application aux surfaces Browniennes	78
2.5.1	Surfaces Browniennes fractionnaires	79
2.5.2	Calcul numérique des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$	81
2.5.3	Densités de probabilité	89
2.6	Application à des surfaces rugueuses autoaffines anisotropes	93
2.6.1	Calcul numérique des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$	94
2.6.2	Densités de probabilité	98
2.7	Discussion	101
2.7.1	Détection de contours par la méthode MMTO 2D	101
2.7.2	Débruitage d'une image par la méthode MMTO 2D	104
3	MMTO 2D : analyse multifractale	109
3.1	Introduction	109
3.2	Synthèse de surfaces rugueuses multifractales : modèles hiérarchiques	114
3.2.1	Cascades singulières intégrées fractionnairement (FISC)	114
3.2.2	Cascades aléatoires sur des bases orthogonales d'ondelettes séparables	118
3.3	Analyse multifractale des modèles de cascade	128
3.3.1	Surfaces rugueuses multifractales générées par intégration fractionnaire d'un modèle de cascade singulière	128
3.3.2	Surfaces rugueuses multifractales générées par cascades aléatoires sur des bases orthogonales d'ondelettes séparables	134
3.4	Noyau d'autosimilarité	143
3.4.1	Méthode de calcul du noyau d'autosimilarité	143
3.4.2	Estimation du noyau d'autosimilarité de surfaces rugueuses générées par des modèles de cascades \mathcal{W} aléatoires.	145
3.5	Transformée en ondelettes et fonctions de corrélation espace-échelles	152
3.5.1	Fonctions de corrélation espace-échelles	152
3.5.2	Analyse des corrélations espace-échelles des cascades \mathcal{W} aléatoires	153
3.5.3	Distinction entre processus multiplicatifs et additifs	155
3.6	Perspectives	156
4	MMTO 2D : application aux images de nuages	159
4.1	Introduction	159
4.2	Images Landsat de nuages stratocumulus marins	163

4.3	Analyse multifractale des images de nuages	169
4.3.1	Calcul numérique des spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$	169
4.3.2	Densité de probabilité des MMMTO	177
4.3.3	Structures localisées présentes dans les images Landsat	185
4.4	Noyau d'autosimilarité	188
4.5	Fonctions de corrélation des images Landsat du champ de radiance	192
4.6	Discussion	195
5	Conclusion	199

Chapitre 1

Aspects numériques et algorithmiques

La transformation en ondelettes, introduite dans la fin des années 80 pour le traitement et l'analyse du signal, trouve ses applications dans des domaines de plus en plus variés [22–37]. Elle procure une information multiéchelle sur la structure d'un signal. L'une des préoccupations majeures lorsque l'on utilise ce genre d'outil est la rapidité. Bien que les ordinateurs soient de plus en plus puissants, le besoin d'optimisation reste très présent, car cette montée en puissance est utilisée pour étudier des quantités de données de plus en plus importantes. En termes algorithmiques, on peut classer la transformation en ondelettes en deux catégories. La première, la transformation en ondelettes discrète sur base d'ondelettes [29, 36, 51], se caractérise par une discrétisation des échelles (facteur deux entre chaque échelle). Celle-ci permet l'utilisation d'un algorithme récursif qui récupère une partie du calcul à une échelle pour le calcul à l'échelle suivante. La transformée en ondelettes discrète se calcule en un nombre d'opérations proportionnel à la taille des données. La seconde catégorie est la transformation en ondelettes continue [26, 27, 29, 35–37]. Plus générale, elle offre une plus grande gamme d'utilisations possibles dans la mesure où elle ne quantifie plus les échelles. Cependant, elle perd de son attrait par sa lenteur devant sa consœur discrète. Il n'est plus possible ici d'employer les données d'une échelle à l'autre : il est nécessaire d'effectuer un calcul de convolution pour chaque échelle. Le temps de calcul d'une transformée en ondelettes continue dépend donc du nombre d'échelles explorées et du temps mis par l'algorithme de convolution utilisé. Cette convolution ayant un rôle clé dans la rapidité du calcul de la transformée en ondelettes continue, il est primordial d'attacher une attention

particulière aux performances des algorithmes utilisés. Plusieurs algorithmes permettent de calculer un produit de convolution, chacun ayant un temps de calcul différent suivant le rapport des tailles des signaux mis en jeu. Il s'agit de choisir l'algorithme qui optimisera ce temps pour le jeu de paramètres qui correspond à une échelle donnée.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Une première section (1.1) présente les relations entre espace direct et espace de Fourier. On verra ainsi comment une fonction s'exprime dans l'espace de Fourier, comment et sous quelles contraintes sa numérisation est possible, et quelle est la façon optimum d'évaluer la transformée de Fourier d'un signal. La section 1.2 présente le produit de convolution. Après quelques généralités, trois algorithmes sont étudiés : la convolution directe, application directe de la formule de convolution ; la convolution par transformée de Fourier, qui s'applique aux signaux périodiques ; la convolution par morceaux, qui est un découpage de la convolution par transformée de Fourier. On discutera ensuite des performances relatives de ces algorithmes et des précautions à prendre lors de leur utilisation. La section 1.3 applique à la transformée en ondelettes les techniques de convolution présentées dans la section 1.2. Enfin, la section 1.4 généralise à deux dimensions les considérations des sections précédentes.

1.1 Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est un outil fondamental en traitement du signal et en analyse de données [36, 52, 53]. Elle fournit une vision fréquentielle d'une fonction et possède de nombreuses propriétés qui facilitent la manipulation des données étudiées. La nature de ces données ainsi que l'utilisation d'ordinateur pour leur manipulation nécessitent l'introduction de la numérisation de la transformation de Fourier. Cependant, cette numérisation se fait dans des conditions très particulières et impose des contraintes sur les données manipulées et sur les fonctions numérisées.

1.1.1 Définitions, propriétés et exemples

Soit f une fonction complexe de la variable temporelle t . Sa *transformée de Fourier* (TF) est définie par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (1.1)$$

Cette transformation permet d'avoir un regard différent sur le comportement de f . Avec $\hat{f}(\omega)$, on quantifie la contribution dans f des oscillations de fréquence ω . La variable ω est homogène à l'inverse de t .

La *transformée de Fourier inverse* de la fonction \hat{f} est définie par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2)$$

Lorsque l'on utilise l'équation (1.2), on parle de représentation dans l'*espace direct*; lorsque l'on utilise l'équation (1.1), on parle de représentation dans l'*espace de Fourier* (ou *espace réciproque*). À une propriété de f dans l'espace direct correspond une autre propriété de \hat{f} dans l'espace de Fourier. Il en est de même pour les opérations sur les fonctions. Suit une liste d'applications de la TF sur certaines opérations, certaines propriétés et certains exemples.

$$\text{Opérations} \quad \text{espace direct} \longleftrightarrow \text{espace de Fourier}$$

$$\hat{f}(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (1.3)$$

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \longleftrightarrow \lambda \hat{f}(\omega) + \mu \hat{g}(\omega) \quad (1.4)$$

$$f(t)g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \hat{f} \star \hat{g}(\omega) \quad (1.5)$$

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega) \quad (1.6)$$

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (1.7)$$

$$\frac{d^p f}{dt^p}(t) \longleftrightarrow (i\omega)^p \hat{f}(\omega) \quad (1.8)$$

$$\text{Propriétés} \quad \text{espace direct} \longleftrightarrow \text{espace de Fourier}$$

$$f \text{ paire} \longleftrightarrow \hat{f} \text{ paire} \quad (1.9)$$

$$f \text{ impaire} \longleftrightarrow \hat{f} \text{ impaire} \quad (1.10)$$

$$f \text{ réelle} \longleftrightarrow \hat{f}^*(\omega) = \hat{f}(-\omega), \quad (1.11)$$

$$\mathcal{R}(\hat{f}) \text{ paire et } \mathcal{J}(\hat{f}) \text{ impaire}$$

$$f \text{ imaginaire} \longleftrightarrow \hat{f}^*(\omega) = -\hat{f}(-\omega), \quad (1.12)$$

$$\mathcal{R}(\hat{f}) \text{ impaire et } \mathcal{J}(\hat{f}) \text{ paire}$$

$$\text{Fonctions (distributions)} \quad \text{espace direct} \longleftrightarrow \text{espace de Fourier}$$

$$\square_T \longleftrightarrow 2 \frac{\sin(\omega T)}{\omega} \quad (1.13)$$

$$e^{-t^2/2\sigma^2} \longleftrightarrow \sigma \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2 \sigma^2/2} \quad (1.14)$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (1.15)$$

$$\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-i\omega t_0} \quad (1.16)$$

$$\square\square_T \longleftrightarrow \frac{2\pi}{T} \square\square_{\frac{2\pi}{T}} \quad (1.17)$$

Cette suite d'équivalences montre l'intérêt de passer de l'espace direct à l'espace réciproque (ou vice versa) suivant la caractéristique que l'on désire exploiter.

Comme nous allons le voir dans la section suivante, l'usage de la TF d'une distribution peigne de Dirac (Éq. (1.17)) est central dans la manipulation de fonctions échantillonnées.

Le calcul de cette TF découle de la formule de Poisson [36, 53] :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-inT\omega} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (1.18)$$

1.1.2 Échantillonnage et périodisation

On appelle *échantillonnage* l'enregistrement de la fonction f à des intervalles de temps T . Cette opération peut se faire avec perte. L'échantillonnage possède une opération équivalente dans l'espace de Fourier. Whittaker [54] et Shannon [55] donnent un critère sur cette représentation pour évaluer les éventuelles erreurs commises.

La version *échantillonnée* de f avec un pas T est définie par

$$f_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT). \quad (1.19)$$

Cela revient à définir f_e comme étant le produit de f avec un peigne de Dirac de pas T . En combinant le fait que la TF d'un produit est un produit de convolution (Éq. (1.5)) d'une part et d'autre part que la TF d'un peigne de Dirac est un autre peigne de Dirac (Éq. (1.17)), on en déduit que \hat{f}_e – la TF de f_e – est obtenue en convoluant \hat{f} avec un peigne de Dirac de pas $\frac{2\pi}{T}$, soit

$$\hat{f}_e(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (1.20)$$

L'équation (1.20) indique que la fonction \hat{f}_e est $\frac{2\pi}{T}$ -périodique et qu'elle est construite comme une somme de versions translattées de \hat{f} . Une manière de savoir si une erreur a été commise lors de l'échantillonnage consiste à se demander si f_e (ou \hat{f}_e) contient toute l'information nécessaire pour reconstruire f (ou \hat{f}). La réponse nous est donnée par Whittaker [54] et Shannon [55], qui affirment que

$$\text{si } \text{supp}(\hat{f}) \subset \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right],$$

$$\text{alors } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)h_T(t - nT) = f_e \star h_T(t),$$

$$\text{avec } h_T(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}, \quad (1.21)$$

où $\text{supp}(\hat{f})$ est le support de \hat{f} . La figure 1.1 illustre l'échantillonnage d'une fonction ainsi que sa reconstruction par la formule de Whittaker-Shannon. Cette figure montre, étape après étape, l'équivalence entre une action dans l'espace direct et une action dans l'espace

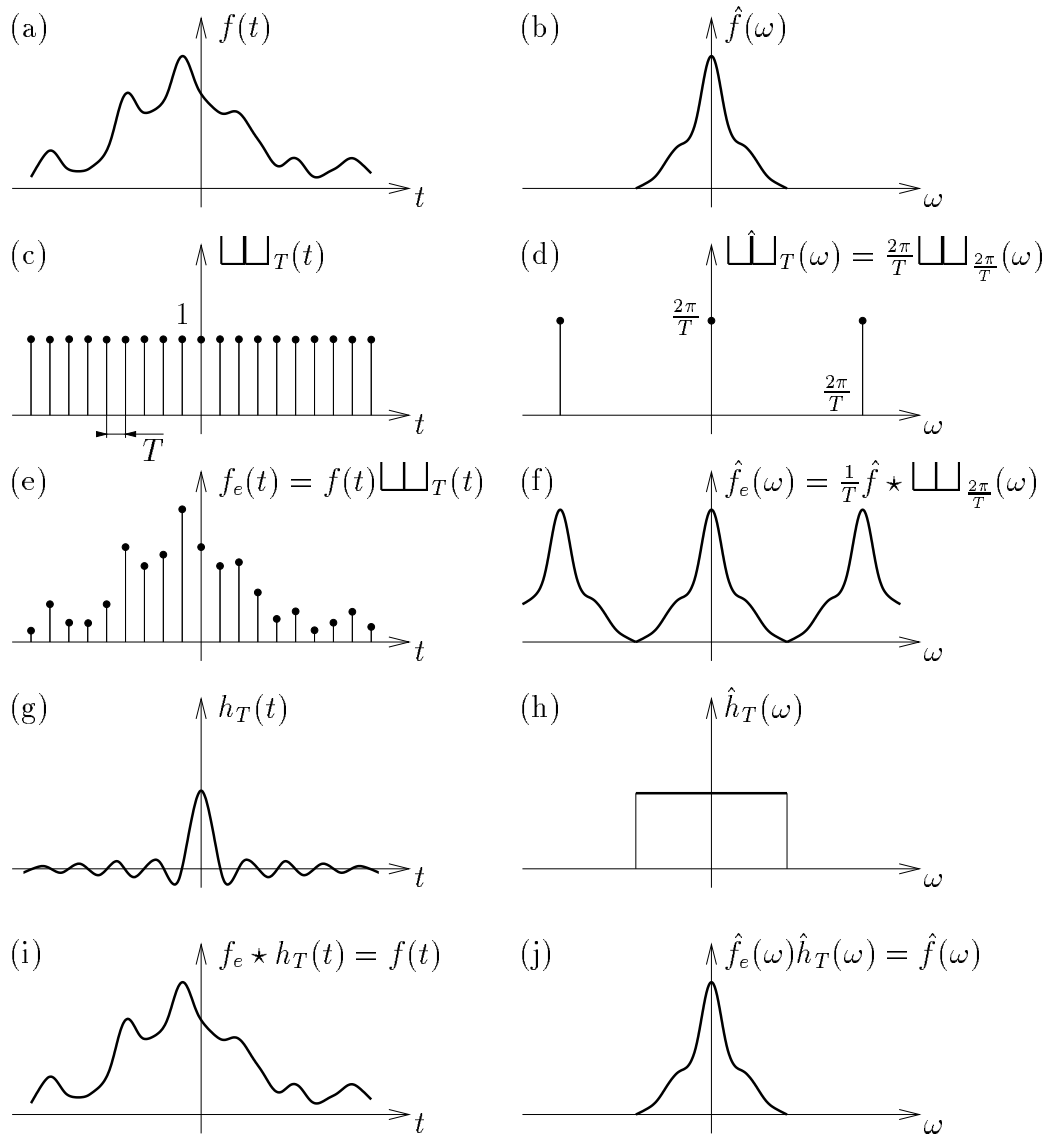


Fig. 1.1 – Illustration de l'échantillonnage d'une fonction et de sa reconstruction. La fonction f (a) et sa TF \hat{f} (b). L'échantillonnage f_e de f au pas T est représenté en (e). Il est obtenu en utilisant le peigne de Dirac de pas T (c). L'opération équivalente dans l'espace de Fourier (périodisation avec un peigne de Dirac de pas $\frac{2\pi}{T}$ (d)) est représentée en (f). La reconstruction se fait grâce à h_T (g) et \hat{h}_T (h) pour redonner la fonction originale (i) et sa transformée de Fourier (j).

de Fourier.

Comme l'indique l'équation (1.21), la reconstruction est soumise à condition : ω_{max} , la plus grande fréquence de la fonction f , doit être inférieure à une fréquence critique ω_c qui dépend du pas d'échantillonnage T ($\omega_c = \frac{\pi}{T}$). Si cette contrainte n'est pas respectée (c'est-à-dire si l'échantillonnage est trop large), la reconstruction se fait avec erreur. On parle alors d'effet d'*aliasing* [36, 52, 53]. La figure 1.2 illustre cet effet : dans la figure 1.2c, on constate que l'échantillonnage choisi ne permet pas de « représenter la forme » de f , car cette fonction possède des oscillations de taille caractéristique inférieure à T . Il est donc impossible d'espérer remonter à la fonction f . La fonction reconstruite (Fig. 1.2e) peut être radicalement différente de la fonction d'origine. Revenons à la représentation dans l'espace de Fourier. La figure 1.2d montre que les versions translattées de \hat{f} se recouvrent. La somme de ces translations introduit une erreur pour les fréquences concernées par le recouvrement. Ce sont, par exemple, les fréquences comprises entre ω_c et ω_{max} . La contribution dans \hat{f} d'une fréquence ω de cet intervalle est reportée sur la fréquence $\omega_c - \omega$, c'est-à-dire que la valeur $\hat{f}(\omega)$ intervient dans l'expression de $\hat{f}_e(\omega_c - \omega)$. Ainsi, la partie $[\omega_c, \omega_{max}]$ de \hat{f} introduit une erreur sur l'intervalle $[\omega_c - (\omega_{max} - \omega_c), \omega_c]$ (partie hachurée des figures 1.2d et 1.2f). Cette erreur se répercute lors de la reconstruction (Fig. 1.2f). Notons que dans le cas où ω_{max} est supérieure à $\frac{2\pi}{T}$ (voire $\omega_{max} = \infty$), toutes les fréquences sont concernées par le recouvrement.

Des effets symétriques apparaissent lorsque l'on échantillonne la représentation dans l'espace de Fourier. Dans ce cas, la représentation dans l'espace direct est périodique et l'on doit aussi faire face à un effet d'*aliasing*.

1.1.3 Algorithmes de calcul de la transformée de Fourier

Transformation de Fourier discrète

En pratique on manipule rarement la fonction f directement. On a généralement accès à un nombre fini N de ses valeurs, espacées d'un pas T . Dans ce cas, on parlera de *signal numérique* ou de *signal discret*. Dans le cadre de l'étude d'un tel signal par ordinateur, tous les calculs se font numériquement. On appelle *transformée de Fourier discrète* (TFD) [36, 53], la représentation dans l'espace de Fourier d'un signal numérique, cette représentation étant aussi un signal numérique. La figure 1.3 illustre les étapes qui mènent à la définition de la *transformation de Fourier discrète*. On part de la fonction f (Fig. 1.3a) et de sa TF \hat{f} (Fig. 1.3b). On effectue ensuite les opérations nécessaires à la numérisation de f (Figs 1.3c et 1.3e), puis à celle de \hat{f} (Figs 1.3l et 1.3n). Les figures 1.3g et 1.3i concernent la limitation aux N enregistrements de la fonction f . Le résultat de ces opérations donne f_1 (Fig. 1.3m) et \hat{f}_1 (Fig. 1.3n). Comme l'indique la section précédente, une fonction discrète dans un espace donne une fonction périodique dans l'autre espace. Dans notre cas ce sont les deux représentations qui sont discrètes. Elles sont donc aussi périodiques :

- f_1 est discrète avec un pas T (Fig. 1.3c) et périodique avec une période NT (Fig. 1.3k) ;
- \hat{f}_1 est discrète avec un pas $\frac{2\pi}{NT}$ (Fig. 1.3l) et périodique avec une période $\frac{2\pi}{T}$ (Fig. 1.3d).

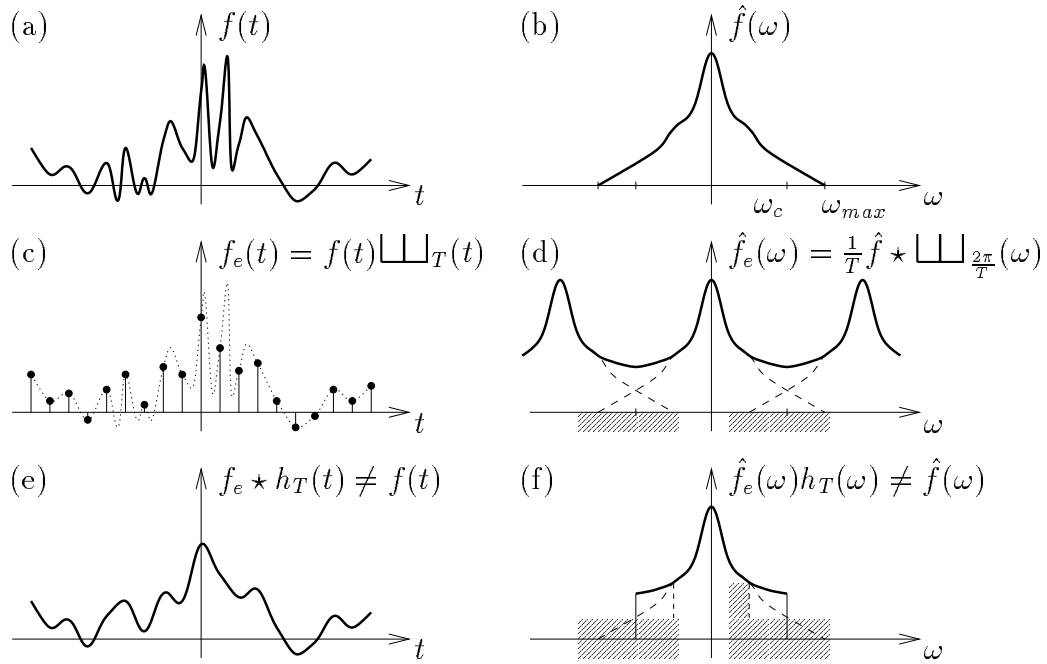


Fig. 1.2 – Illustration de l'effet d'aliasing. La fonction f (a) et sa transformée de Fourier \hat{f} (b). L'échantillonnage f_e au pas T de f est représenté en (c). L'opération équivalente dans l'espace de Fourier entraîne un recouvrement des queues du spectre de f (d). Le fenêtrage du spectre \hat{f}_e ne permet pas de retrouver le spectre \hat{f} (f). De manière équivalente, on ne retrouve pas f par convolution de f_e avec h_T (e).

Ainsi, f_1 (Fig. 1.3m) est entièrement décrite par N enregistrements pris sur une période. Il en est de même pour \hat{f}_1 (Fig. 1.3n). Ces enregistrements correspondent aux signaux numériques que l'on s'est proposé d'étudier et les passages de l'un à l'autre définissent la *transformation de Fourier discrète* et la *transformation de Fourier discrète inverse*. Voici les expressions complètes de f_1 et de \hat{f}_1 :

$$f_1(t) = \frac{NT}{2\pi} \left(f \text{ rect}_T \text{ rect}_{\frac{NT}{2}} \right) * \text{rect}_{NT}(t) ; \quad (1.22)$$

$$\hat{f}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \text{rect}_{\frac{2\pi}{NT}}(\omega) \left(\hat{f} * \text{rect}_{\frac{2\pi}{T}} * \hat{\text{rect}}_{\frac{NT}{2}}(\omega) \right). \quad (1.23)$$

Pour simplifier les notations, on fixe $T = 1$ et on prend le premier enregistrement en $t = 0$. Avec ces conventions, les enregistrements du signal numérique dans l'espace direct sont notés

$$f[n] = f_1(n), \quad \text{pour } 0 \leq n < N. \quad (1.24)$$

Les enregistrements du signal numérique dans l'espace de Fourier (qui est la TFD de $f[n]$) sont notés

$$\hat{f}[k] = \hat{f}_1\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \quad \text{pour } 0 \leq k < N. \quad (1.25)$$

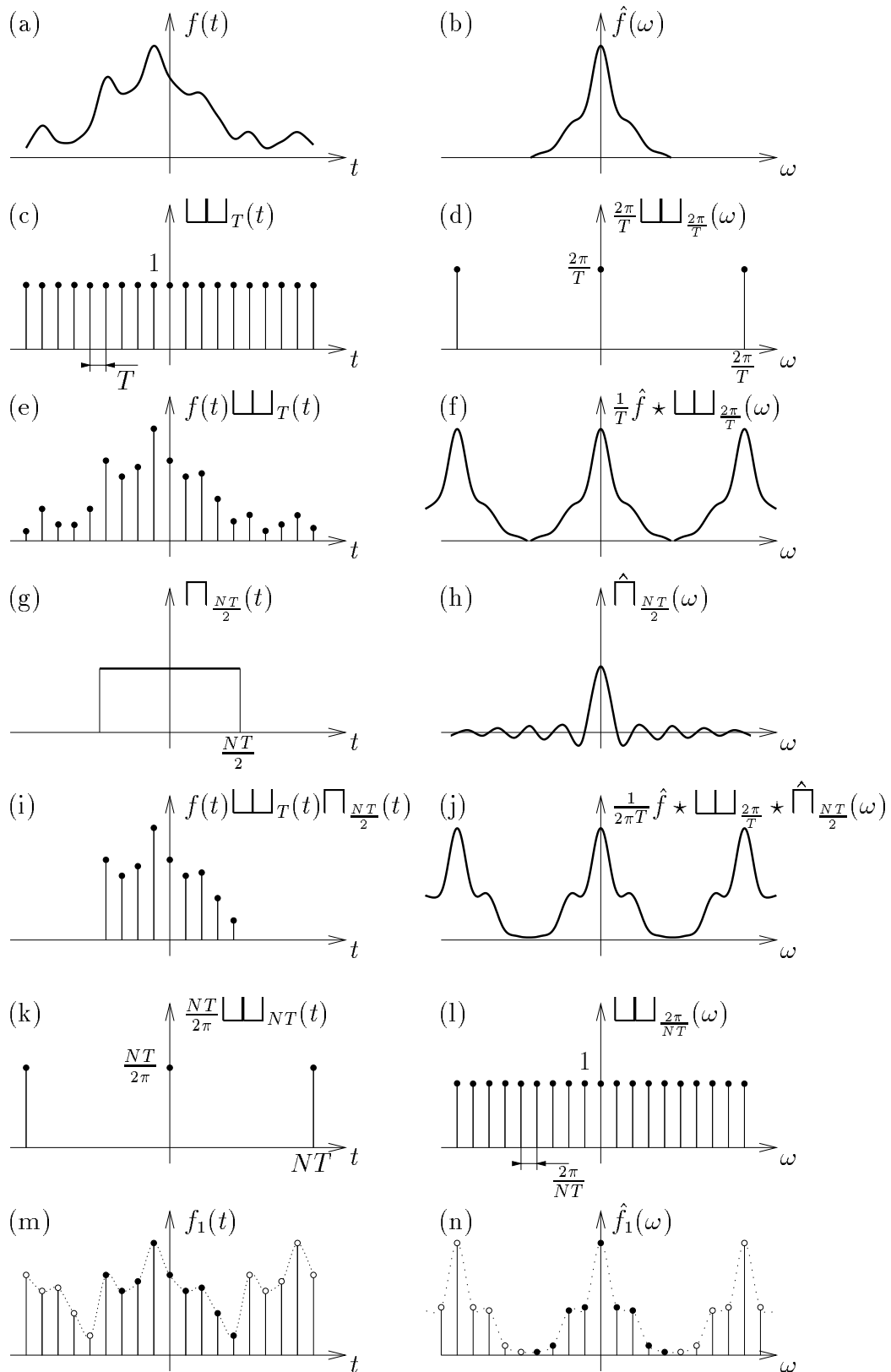


Fig. 1.3 – Illustration de la définition de la TFD. La fonction f (a) et sa TF \hat{f} (b). La numérisation de f (e) obtenue grâce à (c). Restriction (g) à N enregistrements de f (i). La numérisation de \hat{f} (n) obtenue grâce à (l). La transformation de f_1 en \hat{f}_1 définit la TFD.

Le passage d'une représentation à l'autre se fait avec les formules suivantes – qui découlent des expressions (1.22) et (1.23). Pour la TFD on a

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \exp\left(\frac{-i2\pi kn}{N}\right), \quad (1.26)$$

alors que pour la TFD inverse on a

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] \exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right). \quad (1.27)$$

Il est intéressant de connaître la complexité des calculs associés aux formules (1.26) et (1.27). La complexité est un ordre de grandeur du nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour effectuer un calcul donné. Ici on a N valeurs à calculer. Pour chaque valeur, on effectue N multiplications et $N - 1$ additions. Ce qui nous donne $N(N + N - 1)$ opérations élémentaires. Soit une complexité en $\mathcal{O}(N^2)$. Cette complexité est la même pour les deux calculs (TFD et TFD inverse).

Lien avec la transformée de Fourier continue

La TFD correspond à la restriction de la TF continue aux fonctions périodiques et discrètes [36, 53] – ou signaux numériques. Intéressons-nous au cas où ces signaux sont des approximations de fonctions continues. On a vu dans la section 1.1.2 que l'échantillonnage induit un effet d'aliasing. Comme l'échantillonnage est effectif dans les deux représentations, cet effet est double. Une autre source d'erreur est la limitation aux N enregistrements de la fonction f (Figs 1.3g et 1.3i). Enfin, si l'on change l'ordre des opérations présentées sur la figure 1.3, on obtient des résultats différents. En effet, nous avons préféré prendre cet ordre pour refléter la numérisation de la fonction f . Mais on aurait très bien pu s'intéresser à la numérisation de \hat{f} . Dans ce cas, toutes les étapes sont inversées et les fonctions obtenues sont différentes. Appelons ces fonctions f_2 et \hat{f}_2 . Ainsi,

- f_1 est la numérisation de la fonction f ;
- \hat{f}_1 est la TFD de la numérisation de la fonction f ;
- f_2 est la numérisation de la fonction \hat{f} (qui est la TF de f) ;
- \hat{f}_2 est la TFD inverse de la numérisation de la fonction \hat{f} .

Soit

$$\begin{array}{ccc} \text{fonctions continues :} & f \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f} & f \xleftarrow{\text{TF inverse}} \hat{f} \\ & \downarrow \text{numérisation} & \downarrow \text{numérisation} \\ \text{signaux numériques :} & f_1 \xrightarrow{\text{TFD}} \hat{f}_1 & f_2 \xleftarrow{\text{TFD inverse}} \hat{f}_2 \end{array}$$

Rien ne nous garantit que $f_1 = f_2$ et que $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$. On peut donc faire la remarque suivante.

Remarque

Si l'on numérise la TF \hat{f} d'une fonction f , on n'obtient pas forcément le même résultat que si l'on calcule la TFD de la fonction f numérisée.

Cette erreur peut être contrôlée en maîtrisant au mieux le double effet d'aliasing. Comme nous l'avons signalé dans la section 1.1.2, l'effet d'aliasing est réduit quand on diminue le pas d'échantillonnage. Lorsque cela sera possible, le choix de ce pas devra donc prendre en considération les deux représentations.

Prenons un exemple pour illustrer ces problèmes de numérisation. Choisissons une fonction dont les représentations sont connues analytiquement. On peut donc sans problème numériser f (et \hat{f}) à N fixé et pour différentes valeurs de T . L'objectif est d'appliquer la TFD (et la TFD inverse), afin d'estimer l'erreur commise en fonction de T . L'exemple choisi est la dérivée seconde de la Gaussienne :

$$f(t) = \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \right) \exp \left(-\frac{t^2}{2\sigma} \right), \quad (1.28)$$

$$\hat{f}(\omega) = -\sqrt{2\pi\sigma} \omega^2 \exp \left(-\frac{\omega^2\sigma}{2} \right). \quad (1.29)$$

On fixe $N = 32$. Faire varier T revient à faire varier σ . On prend donc $T = 1$ et on calcule f_1 , \hat{f}_1 , \hat{f}_2 et f_2 pour différentes valeurs de σ . Pour un σ donné, on calcule le signal d'erreur entre f_1 et f_2

$$\varepsilon_D(t) = f_1(t) - f_2(t), \quad (1.30)$$

et le signal d'erreur entre \hat{f}_1 et \hat{f}_2

$$\varepsilon_F(\omega) = \hat{f}_1(\omega) - \hat{f}_2(\omega). \quad (1.31)$$

Les différents calculs pour $\sigma = 0.6$ sont représentés sur la figure 1.4. Sur la figure 1.4a, on vérifie que les points f_1 (\times) sont sur la courbe de f (par construction). Il en est de même pour \hat{f}_2 (\square) et \hat{f} sur la figure 1.4b. Toujours sur cette figure, on constate que \hat{f}_1 est très différente de \hat{f}_2 ; cela est dû à un échantillonnage de f_1 beaucoup trop large : il ne permet pas une bonne représentation de la « forme » de f . De même, en revenant à la figure 1.4a, on constate la différence entre f_2 et f_1 qui est due à un domaine trop petit de la représentation de Fourier. Les figures 1.4c et 1.4d quantifient point par point l'erreur commise entre ces fonctions. Tous ces signaux sont à nouveau représentés sur la figure 1.5 pour $\sigma = 50$. Cette figure traite des mêmes effets que la figure 1.4, mais en intervertissant l'espace direct avec l'espace de Fourier.

Il reste maintenant à rechercher les situations où l'erreur commise est acceptable. Pour cela, changeons la taille de nos signaux et fixons $N = 1024$. À partir du calcul de ε_D et ε_F pour un σ donné, on va estimer les erreurs relatives :

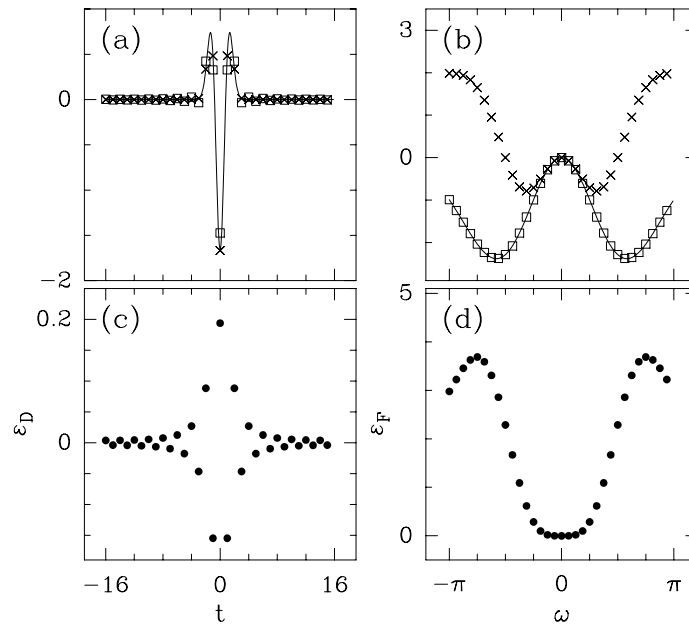


Fig. 1.4 – Dérivée seconde de la Gaussienne, $\sigma = 0.6$ et $N = 32$ (Éqs (1.28) et (1.29)). (a) Fonction $f(-)$, signal f_1 (\times) et signal f_2 (\square). (b) Fonction $\hat{f}(-)$, signal \hat{f}_1 (\times) et signal \hat{f}_2 (\square). (c) Erreur entre f_1 et f_2 . (d) Erreur entre \hat{f}_1 et \hat{f}_2 .

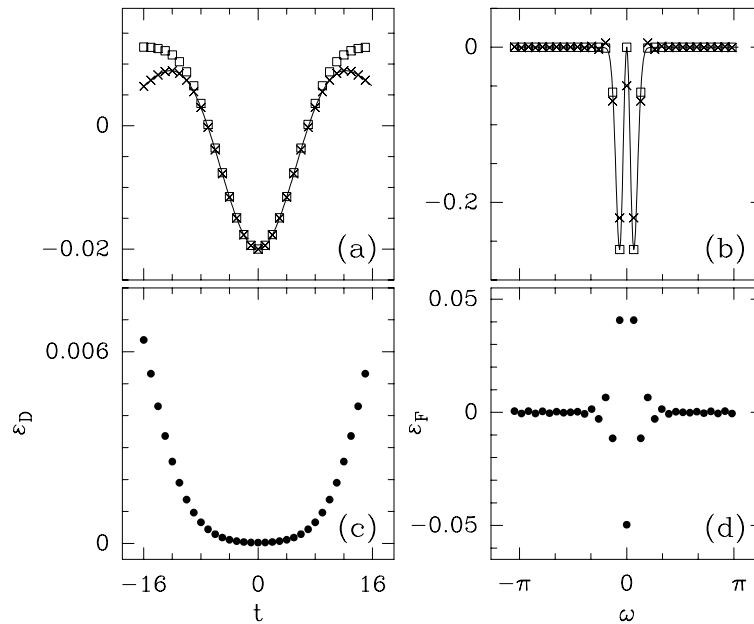


Fig. 1.5 – Dérivée seconde de la Gaussienne, $\sigma = 50$ et $N = 32$ (Éqs (1.28) et (1.29)). (a) Fonction $f(-)$, signal f_1 (\times) et signal f_2 (\square). (b) Fonction $\hat{f}(-)$, signal \hat{f}_1 (\times) et signal \hat{f}_2 (\square). (c) Erreur entre f_1 et f_2 . (d) Erreur entre \hat{f}_1 et \hat{f}_2 .

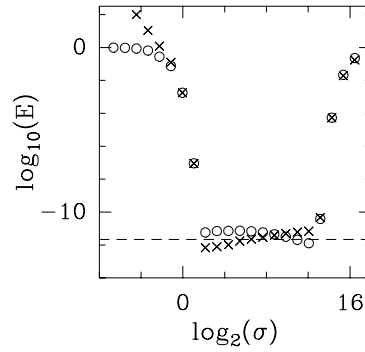


Fig. 1.6 – Erreurs E_D entre f_1 et f_2 (\times) et E_F entre \hat{f}_1 et \hat{f}_2 (\circ). La taille des signaux est $N = 1024$. Le trait interrompu correspond à l'erreur numérique de l'algorithme de TFD utilisé.

$$E_D(\sigma) = \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_D(n)|^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |f_1(n)|^2}} \quad (1.32)$$

et

$$E_F(\sigma) = \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_F(n)|^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{f}_2(n)|^2}}. \quad (1.33)$$

La figure 1.6 montre l'évolution de ces erreurs relatives en fonction de σ . Le trait interrompu représente une majoration de l'erreur numérique de l'algorithme de TFD utilisé. On constate que sur un intervalle de valeurs de σ ($\sigma \in [4, 4096]$), les erreurs commises restent de l'ordre de cet optimum. Ainsi, au niveau des calculs numériques, on considérera que sur cet intervalle on a bien $f_1 = f_2$ et $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$.

Transformée de Fourier rapide

L'inconvénient majeur de la TFD est sa complexité en $\mathcal{O}(N^2)$. L'algorithme de *transformation de Fourier rapide* (FFT, de l'anglais *Fast Fourier Transform*) [56,57] permet d'améliorer considérablement les temps de calcul. Cet algorithme se base sur une réorganisation de la somme dans la formule (1.26). On sépare les termes où n est pair des termes où n est impair. Chaque sous-somme peut être vue comme une TFD d'un signal de taille moitié. Ainsi, le nombre d'opérations élémentaires pour calculer une FFT sur N points vaut N plus deux fois le nombre d'opérations pour une FFT sur $N/2$ points. On effectue ensuite la même réorganisation sur chaque sous-signal, jusqu'à arriver à un signal de taille 1. On obtient ainsi une complexité en $\mathcal{O}(N \log_2 N)$. Toutefois, cet algorithme possède une contrainte : N doit être une puissance de 2.

Lorsque le signal à transformer possède des propriétés particulières (parité, réel pur, etc.),

on peut encore diminuer la complexité en se limitant au calcul de certains coefficients. Par exemple, un signal réel pur dans l'espace direct donne un signal pair dans l'espace de Fourier ; on peut donc se contenter de ne calculer que la moitié des termes $\hat{f}[k]$.

De nombreuses mises en œuvre de l'algorithme de FFT ont été proposées [57–59]. Beaucoup sont disponibles gratuitement et la plupart sont écrites en langage C ou en `fortran`. Chaque mise en œuvre correspond à des performances différentes. Récemment, Frigo et Johnson [60] du MIT ont développé une bibliothèque de procédures en langage C qui combine les avantages de la plupart des méthodes existantes. Le résultat, la FFTW (de l'anglais *Fastest Fourier Transform in the West*), est une FFT généralement plus rapide que ses équivalents. Un autre avantage non négligeable est que la FFTW ne se limite pas aux signaux dont la taille est une puissance de 2. (Consulter le site www.fftw.org pour plus d'informations.) Dans la suite de ce chapitre, tous les calculs qui nécessitent l'application d'une FFT seront effectués avec la FFTW.

1.2 Produit de convolution

Le produit de convolution est un outil incontournable en traitement du signal et en analyse de données [36, 57]. C'est un opérateur qui permet de transformer, de filtrer ou de réorganiser des données. Comme pour la TF, il est nécessaire d'introduire la numérisation de cet outil. Il existe plusieurs méthodes permettant d'évaluer un produit de convolution numérique [57]. Chacune d'elles doit être soigneusement étudiée, afin de déterminer son coût et ses limitations, et une attention particulière doit être portée sur la rigueur des algorithmes et sur la cohérence des méthodes entre elles. Dans ces conditions, le passage d'une méthode à une autre peut se faire de manière transparente, au bénéfice de l'optimisation du coût du calcul du produit de convolution.

1.2.1 Cas continu

Soient f et h , deux fonctions complexes de la variable temporelle t . Le *produit de convolution* de f avec h est défini par l'équation intégrale

$$f \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)h(t-u)du. \quad (1.34)$$

Le produit de convolution possède les propriétés suivantes :

$$\text{commutativité} \quad f \star h(t) = h \star f(t), \quad (1.35)$$

$$\text{différenciation} \quad \frac{d}{dt}(f \star h)(t) = \frac{df}{dt} \star h(t) = f \star \frac{dh}{dt}(t), \quad (1.36)$$

$$\text{convolution avec un Dirac} \quad f \star \delta_{\tau}(t) = f(t - \tau), \quad (1.37)$$

auxquelles s'ajoute la propriété (1.5), qui indique qu'à un produit de convolution dans l'espace direct correspond une multiplication dans l'espace de Fourier et réciproquement.

1.2.2 Cas discret

Si les fonctions f et h sont discrètes avec un même pas d'échantillonnage T , l'intégrale (1.34) se reformule de la manière suivante :

$$f \star h[n] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f[p]h[n-p], \quad (1.38)$$

avec $f[n] = f(nT)$ et $h[n] = h(nT)$. Dans ce cas de figure, on parlera de *convolution discrète*. Si de plus f et h sont NT -périodiques, on définit la *convolution circulaire* par

$$f \star h[n] = \sum_{p=0}^{N-1} f[p]h[n-p]. \quad (1.39)$$

Le résultat de cette opération est aussi une fonction NT -périodique. La convolution circulaire possède la propriété suivante :

$$\text{si } g[n] = f \star h[n], \quad \text{alors } \hat{g}[k] = \hat{f}[k]\hat{h}[k]. \quad (1.40)$$

1.2.3 Conventions et notations

En pratique, la convolution discrète s'applique souvent au cas de l'enregistrement discret d'un phénomène (N points) à convoluer avec une fonction filtre à support compact. Dans la suite, nous allons supposer que l'on est dans cette hypothèse de travail. À cette fin, on définit certaines conventions et notations. La convolution se fait entre le *signal* (les enregistrements) et le *filtre*. On prend $T = 1$, aussi bien pour le signal que pour le filtre.

- **Signal.** Appelons \tilde{s} le phénomène (ou la fonction) d'où sont extraits les N enregistrements. Cela veut dire que pour $0 \leq n < N$, $\tilde{s}[n]$ est connu et que pour les autres valeurs de n , $\tilde{s}[n]$ n'est pas forcément connu. Nous verrons plus loin que l'on est amené à faire des choix arbitraires sur le comportement de \tilde{s} en dehors de $[0, N - 1]$. On appelle s le signal tel que $s[n] = \tilde{s}[n]$ sur $[0, N - 1]$ et tel qu'en dehors de cet intervalle s soit entièrement déterminé.
- **Filtre.** Le filtre sera noté f . Dans l'espace direct, f est défini numériquement sur un support compact. Ce support est noté $[D, F]$ et l'on impose qu'il contienne 0^\dagger . Ainsi, le nombre d'enregistrements qui définissent f est $M = F - D + 1$. La figure 1.7 illustre les notations liées au filtre. Pour la convolution circulaire, le filtre doit être N -périodique. On appelle f_p la version périodisée du filtre (Fig. 1.8).

Rappelons que d'après la section 1.1.3, la TFD sur N points donne dans l'espace de Fourier un signal de pas $\frac{2\pi}{N}$ et de période 2π .

[†]Si ce n'est pas le cas, il suffit de traduire le filtre, puis d'effectuer la translation inverse sur le résultat de la convolution (application de la propriété (1.37)).

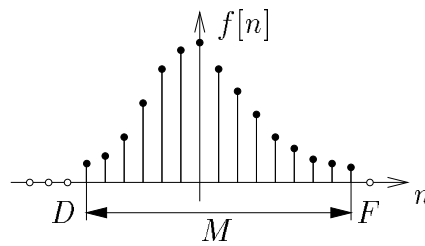


Fig. 1.7 – Filtre numérique : (●) valeurs qui définissent f ; (○) valeurs implicites (= 0).

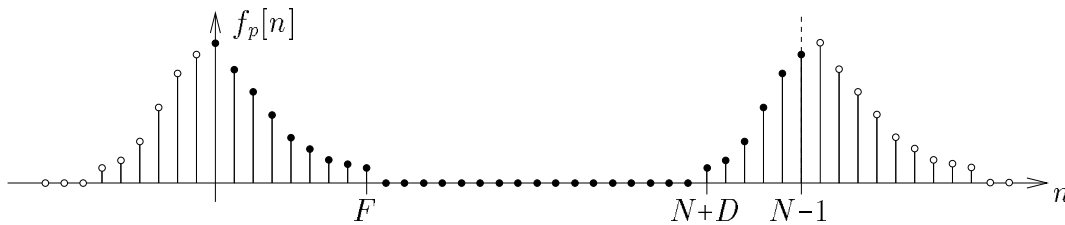


Fig. 1.8 – Filtre numérique périodisé : (●) valeurs sur une période ; (○) valeurs implicites (périodisation des (●)).

1.2.4 Effets de bords

Avec les notations et les conventions précédentes, la somme (1.38) peut être simplifiée. Ainsi, le résultat \tilde{r} de la convolution discrète entre \tilde{s} et f s'écrit

$$\tilde{r}[n] = \tilde{s} \star f[n] = \sum_{p=D}^F \tilde{s}[n-p]f[p] = \sum_{p'=n-D}^{n-F} \tilde{s}[p']f[n-p']. \quad (1.41)$$

Pour certaines valeurs de n , cette somme fait intervenir des enregistrements de \tilde{s} qui sont hors de l'intervalle $[0, N-1]$. Ces enregistrements n'étant pas connus, les valeurs $\tilde{r}[n]$ concernées ne peuvent être calculées. Nous sommes dans cette situation lorsque $n-p$ n'est pas compris entre 0 et $N-1$. Ainsi, comme les valeurs de p sont à prendre dans $[D, F]$, on ne peut calculer $\tilde{r}[n]$ que pour n pris dans $[F, N+D-1]$. Autrement dit, les bords de \tilde{s} « polluent » le calcul de \tilde{r} : on parle d'*effets de bords*. Ces effets sont illustrés par la figure 1.9. L'alternative est soit de se limiter au calcul de \tilde{r} pour n dans $[F, N+D-1]$, soit de faire un choix sur le comportement supposé du signal \tilde{s} en dehors de $[0, N-1]$. Dans la table 1.1, nous évoquons quelques choix possibles pour la gestion des effets de bords : *périodique*, *miroir*, *plateau* et *plateau à 0*. s est le signal \tilde{s} étendu par l'une des formes de gestion des effets de bords. s est donc défini pour toutes les valeurs de n .

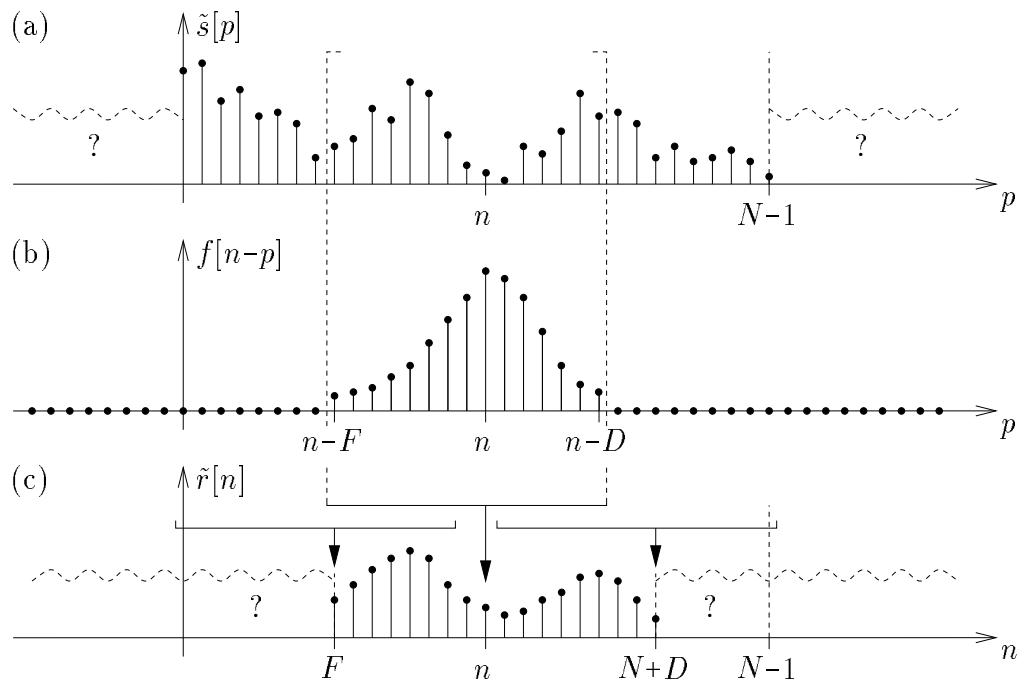


Fig. 1.9 – Illustration des effets de bords. Le calcul de $\tilde{r}[n]$ (c) utilise les valeurs $\tilde{s}[p]$ (a) pour p pris dans $[n - F, n - D]$ (b). Si $n < F$ ou si $n > N + D - 1$, le calcul de $\tilde{r}[n]$ ne peut se faire, car il nécessite des valeurs de \tilde{s} qui ne sont pas connues.

Tab. 1.1 – Valeurs de s en fonction de la gestion des effets de bords

	$n < 0$	$0 \leq n < N$	$N \leq n$
périodique	$s[n] = s[n \bmod N]$		$s[n] = s[n \bmod N]$
miroir	$s[n] = s[-n]$		$s[n] = s[2N - 2 - n]$
plateau	$s[n] = s[0]$	$s[n] = \tilde{s}[n]$	$s[n] = s[N - 1]$
plateau à 0	$s[n] = 0$		$s[n] = 0$

La figure 1.10 illustre chacune de ces alternatives. On appelle r le résultat de la convolution entre s et f . Le signal r peut être calculé pour toutes valeurs de n appartenant à l'intervalle $[0, N - 1]$ (et même hors de cet intervalle). Cependant, on a l'égalité $r[n] = \tilde{r}[n]$ uniquement pour n appartenant à l'intervalle $[F, N + D]$. En dehors de cet intervalle, r est juste une estimation de \tilde{r} , moyennant la gestion des effets de bords choisie.

1.2.5 Algorithmes classiques de convolution et complexité

Le produit de convolution entre le signal s et le filtre f peut être évalué de plusieurs manières. Cette section présente l'algorithme de convolution directe et l'algorithme de convolution par transformation de Fourier. Le choix de l'algorithme se fait en fonction de

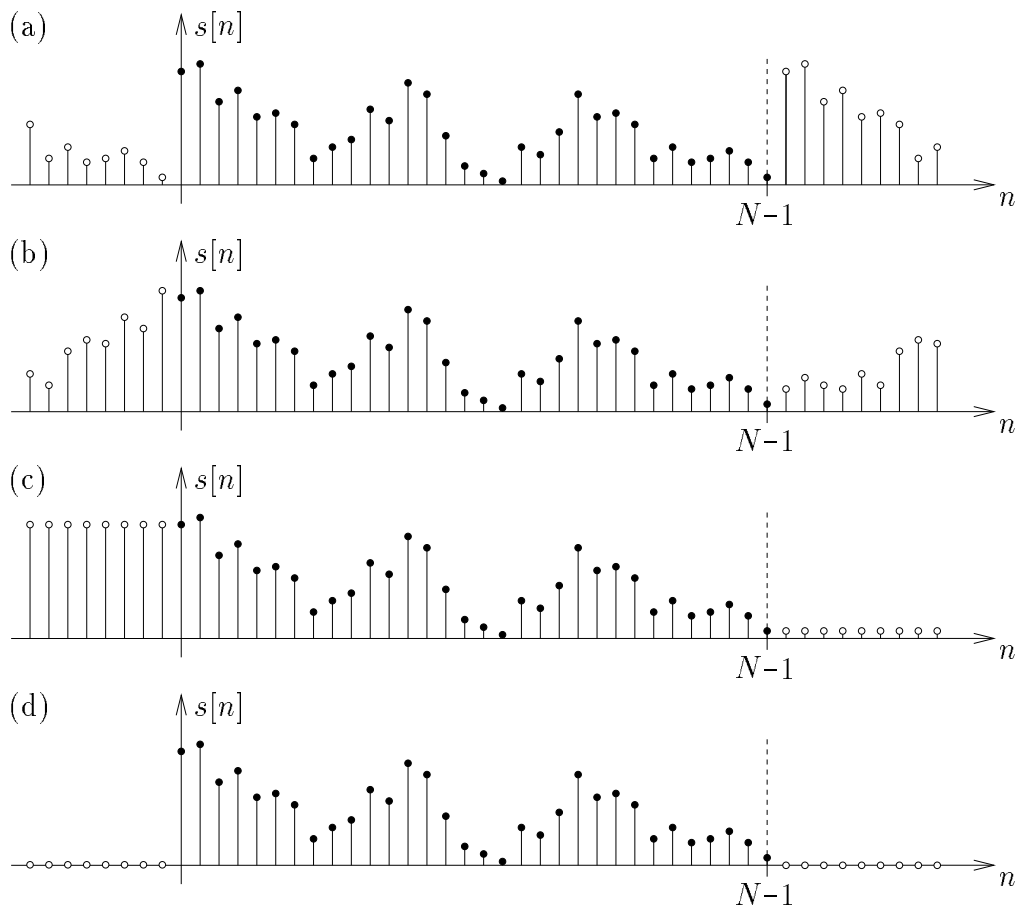


Fig. 1.10 – Illustration des différentes formes de gestion des effets de bords. (a) périodique; (b) miroir; (c) plateau; (d) plateau à 0. Les symboles ont la signification suivante : (●) valeurs d'origine (signal \tilde{s}); (○) valeurs implicites (imposées en fonction des valeurs d'origine).

son coût. Ce coût est à évaluer à deux niveaux : d'abord au niveau du temps de calcul, ensuite au niveau de la place mémoire nécessaire pour le déroulement de ce calcul.

Convolution directe

La convolution du signal s par le filtre f est obtenue par la formule

$$r[n] = s \star f[n] = \sum_{p=D}^F s[n-p]f[p], \quad \text{pour } 0 \leq n < N. \quad (1.42)$$

Le calcul de la valeur $r[n]$ nécessite $M = F - D + 1$ multiplications et $M - 1$ additions, soit $2M - 1$ opérations élémentaires. Ainsi, le calcul de r se fait avec une complexité en $\mathcal{O}(NM)$. Aucun stockage supplémentaire de données n'est nécessaire. Précisons que les valeurs de s

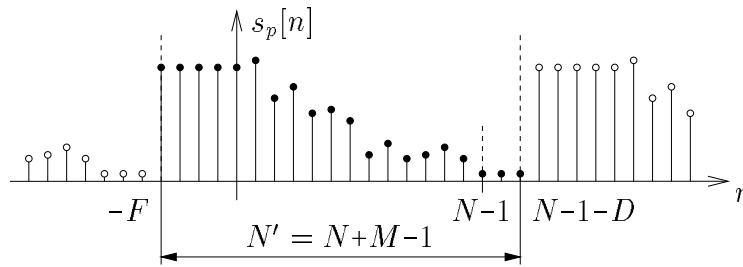


Fig. 1.11 – Signal numérique périodisé : (•) valeurs de s_p égales à celles de s ; (◦) valeurs implicites obtenues par périodisation.

sont implicites ; elles sont obtenues à partir de \tilde{s} en utilisant la table 1.1, suivant la méthode de gestion des effets de bords choisie.

Convolution par transformation de Fourier

Dans le cas où les effets de bords sont gérés de manière périodique, on peut appliquer la convolution circulaire :

$$r[n] = s \star f[n] = s \star f_p[n]. \quad (1.43)$$

Ce calcul peut être effectué dans l'espace de Fourier (propriété (1.39)) :

$$\hat{r}[k] = \hat{s}[k] \hat{f}_p[k], \quad \text{pour } 0 \leq k < N. \quad (1.44)$$

On a vu (section 1.1.3) que le passage d'un espace à l'autre en utilisant la FFT se fait avec une complexité en $\mathcal{O}(N \log_2 N)$. Le calcul de \hat{r} à partir de \hat{s} et de \hat{f}_p se fait en N multiplications. Voici comment se décompose le calcul de r :

$$\left. \begin{array}{l}
 s \xrightarrow[\mathcal{O}(N \log_2 N)]{\text{FFT}} \hat{s} \\
 f \xrightarrow{\text{périodisation}} f_p \xrightarrow[\mathcal{O}(N \log_2 N)]{\text{FFT}} \hat{f}_p
 \end{array} \right\} \xrightarrow[\mathcal{O}(N)]{\text{multiplication}} \hat{r} \xrightarrow[\mathcal{O}(N \log_2 N)]{\text{FFT inverse}} r.$$

Un calcul étant dominé par l'étape de plus grande complexité, le signal r s'obtient avec une complexité en $\mathcal{O}(N \log_2 N)$. Cet algorithme passe par des étapes intermédiaires pour lesquelles il faut stocker des données temporaires. Cela concerne les signaux f_p , \hat{s} , \hat{f}_p et \hat{r} . Cependant, une fois que \hat{f}_p est calculé, on n'a plus besoin de garder f_p . Ainsi, il faut une capacité de stockage supplémentaire de $3N$ données.

Pour pouvoir utiliser cet algorithme avec les autres formes de gestion des effets de bords, il faut créer un signal périodique s_p à partir du signal s . Il faut donc prendre une partie du signal s , que l'on périodise. Ce choix impose une contrainte : pour les valeurs de n comprises entre 0 et $N - 1$, on doit avoir $s \star f_p[n] = s_p \star f_p[n]$. Pour cela, observons les valeurs extrêmes de n . Pour pouvoir calculer $r[0]$ on a besoin de $s[n]$, avec $n \geq -F$, et

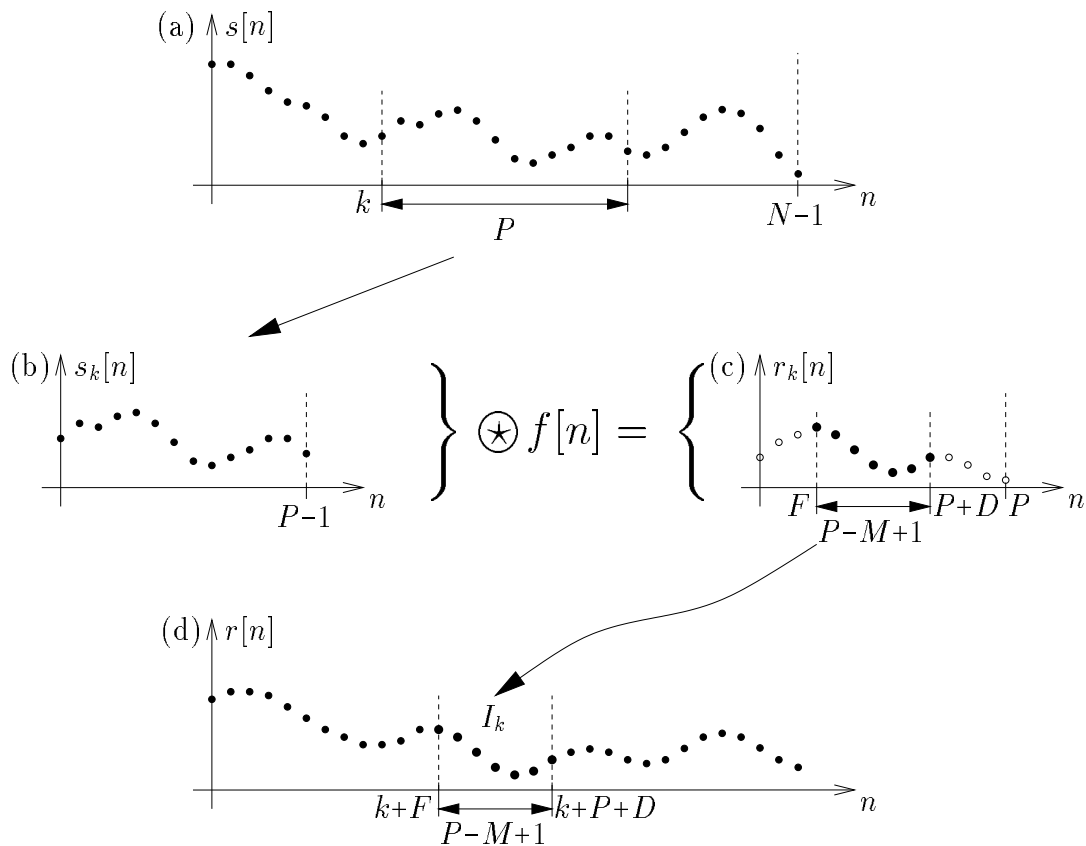


Fig. 1.12 – Dans s (a), on prend un morceau s_k de taille P à la position k . La convolution du morceau s_k (b) avec le filtre f donne le signal r_k (c). Sur $[F, P + D]$, les valeurs de r_k (●) sont égales aux valeurs de r (d) sur l'intervalle I_k .

pour pouvoir calculer $r[N - 1]$ on a besoin de $s[n]$, avec $n \leq N - 1 - D$. Ainsi, si s_p est égal à s sur l'intervalle $[-F, N - 1 - D]$, on a l'égalité entre les deux convolutions pour tout n de $[0, N - 1]$. On peut donc prendre l'intervalle $[-F, N - 1 - D]$ de s comme période de s_p (Fig. 1.11). Toute partie de s qui comprend cet intervalle convient également. La taille minimum est donc $N' = N + M - 1$. L'utilisation de la FFT introduit une contrainte sur la valeur N' . On prendra la plus petite valeur supérieure à $N + M - 1$ admissible pour une FFT. Cette nouvelle taille impose une augmentation du coût (stockage et temps de calcul) de l'algorithme.

1.2.6 Convolution par morceaux

Un autre algorithme permet d'évaluer le produit de convolution entre le signal s et le filtre f . Il consiste à effectuer des convolutions sur des morceaux de s bien choisis avant de reconstruire r à partir des résultats de ces calculs. Le choix des morceaux se fait de telle sorte que la reconstruction n'introduise pas d'erreur. Soit un morceau s_k de taille P pris

dans s à la position k (Fig. 1.12) :

$$s_k[n] = s[n + k], \quad \text{pour } n \in [0, P[. \quad (1.45)$$

Par convolution avec f , on obtient le signal r_k :

$$r_k[n] = s_k \star f[n] = \sum_{p=D}^F s_k[n - p]f[p]. \quad (1.46)$$

Pour les valeurs de n telles que $n - p$ est dans $[0, P[$, on a (Éq. (1.45)) :

$$r_k[n] = \sum_{p=D}^F s[n - p + k]f[p] \quad (1.47)$$

et donc

$$r_k[n] = r[n + k] \quad \text{pour } n \in [F, P + D[. \quad (1.48)$$

L'intervalle I_k de r concerné par cette égalité est $I_k = [k + F, k + P + D[$. Autrement dit, en faisant varier k , le calcul de r_k permet d'accéder à des intervalles I_k différents. Le calcul complet de r se fait en choisissant les signaux r_k – et donc les signaux s_k – de telle sorte que les intervalles I_k se succèdent (Fig. 1.13). La taille des intervalles I_k est égale à $P + D - F$, soit $P - M + 1$. Il faut donc $L = \lceil \frac{N}{P - M + 1} \rceil$ morceaux pour calculer r , où $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier supérieur à x . Ainsi, la complexité de l'algorithme est L fois celle d'une convolution entre deux signaux de P points. Cette convolution est effectuée en utilisant l'algorithme par FFT car, comme nous le verrons plus tard, l'algorithme de convolution directe n'est pas intéressant lorsque le signal et le filtre ont le même nombre de points. La complexité est donc en $\mathcal{O}(LP \log_2(P))$. Il faut choisir P pour que cette complexité soit minimale. Ce choix ne dépend que de la taille M du filtre, car N peut être mis en facteur dans l'expression de L^\dagger . Pour cet algorithme, il faut étendre le filtre f sur une taille P . On doit stocker s_k , \hat{s}_k , f_p , \hat{f}_p , \hat{r}_k et r_k . Cependant, une fois que \hat{s}_k et \hat{f}_p sont calculés, on n'a plus besoin de garder s_k et f_p . Ainsi, on a besoin de $4P$ données supplémentaires.

Remarque

Cet algorithme fait appel à des FFT sur P points. Il faut s'assurer que P est une valeur acceptable pour l'algorithme de FFT utilisé.

1.2.7 Filtre sous forme analytique

Il est relativement courant de connaître la forme analytique du filtre f . Ainsi, on peut le numériser à partir de son expression analytique aux temps adéquats. Dans ce cas, on peut faire des économies de stockage et de temps de calcul. Cependant, il faut être attentif à la cohérence des nouveaux algorithmes utilisés.

[†]En réalité, cette factorisation n'est possible que lorsque N est grand et que l'on peut faire l'approximation $\lceil \frac{N}{P - M + 1} \rceil \sim \frac{N}{P - M + 1}$. Pour N petit, le choix est donc un peu plus délicat. Voir la section 1.2.9 pour une évaluation numérique de P .

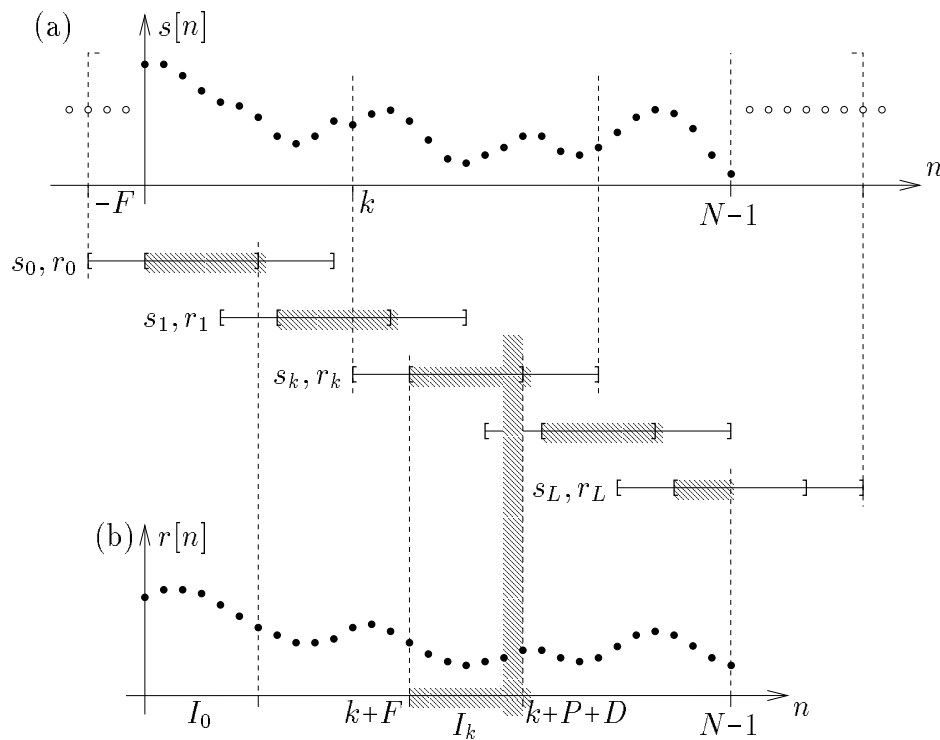


Fig. 1.13 – Illustration du découpage du signal s (a) pour obtenir le signal r (b). La succession des intervalles I_k impose le chevauchement des signaux r_k – et donc des signaux s_k . Pour que I_0 débute à l'indice 0, il faut que le premier point de s_0 soit en $-F$.

Définition d'un filtre analytique

Pour pouvoir adapter les algorithmes au cas analytique, il est nécessaire d'avoir un certain nombre d'informations sur le filtre f . Dans l'espace direct :

- Expression analytique de $f(t)$, sachant que f est échantillonné avec un pas $T = 1$.
- Domaine $[d, f]$ qui correspond à l'intervalle sur lequel les valeurs $f(t)$ ne sont pas négligeables. Toute valeur hors de ce domaine sera considérée comme nulle. De plus, on impose $d \leq 0$ et $f \geq 0$.

Dans l'espace de Fourier :

- Expression analytique de $\hat{f}(\omega)$, sachant que \hat{f} est échantillonné avec un pas $T = \frac{2\pi}{N}$.
- Domaine $[d, f]$ qui correspond à l'intervalle sur lequel les valeurs $\hat{f}(\omega)$ ne sont pas négligeables. Toute valeur hors de ce domaine sera considérée comme nulle. De plus, on impose $-\pi \leq d \leq 0$ et $0 \leq f \leq \pi$. Si d ou f a une valeur absolue supérieure à π , cela signifie que l'on est en présence d'un effet d'aliasing dans l'espace direct (voir section 1.1.2).

Incidence sur les algorithmes

La définition du filtre f sous forme analytique entraîne des modifications plus ou moins importantes des trois algorithmes de calcul du produit de convolution. Ces modifications se répercutent sur les performances de chaque algorithme.

- **Convolution directe.** Pour une valeur n donnée, on constate que l'on doit accéder à la valeur $f[n]$ autant de fois qu'il y a de points dans s . Ainsi, il est plus coûteux de recalculer cette valeur à chaque fois que de la stocker dès le départ. On choisit donc d'enregistrer les valeurs du filtre f , puis d'appliquer l'algorithme numérique de convolution directe. Le fait d'employer la définition analytique de f n'améliore donc pas les performances du calcul. La définition du filtre utilisée est celle de l'espace **direct**.
- **Convolution par morceaux.** Pour une valeur de k donnée, on constate que l'on doit accéder à la valeur $\hat{f}[k]$ autant de fois qu'il y a de morceaux. Ainsi, et pour les mêmes raisons que ci-dessus, on choisit de stocker les valeurs de \hat{f} pour ne pas avoir à les recalculer à chaque fois. On a économisé une FFT sur P points (ainsi que le stockage de f). Ce gain est relativement négligeable lorsque le nombre de morceaux est grand (en effet, on effectue une FFT sur P points pour chaque morceau). La définition du filtre utilisée est celle de l'espace de **Fourier**.
- **Convolution par FFT.** Ici, les valeurs $\hat{f}[k]$ ne sont employées qu'une seule fois lors du calcul. Aussi n'est-il pas nécessaire de les stocker. L'accès direct à la transformée de Fourier de f nous fait économiser une FFT sur N points, alors que l'algorithme numérique en comptait trois. On a donc un gain non négligeable en temps de calcul et en stockage : économie de N points (du stockage de f_p puis de \hat{f}_p) sur les $3N$ de l'algorithme numérique. La définition du filtre utilisée est celle de l'espace de **Fourier**.

Cohérence du filtre

Nous avons vu dans la section 1.1.3 que la numérisation de la TF \hat{f} d'une fonction f , ne donne pas forcément la même chose que si l'on calcule la TFD (ou la FFT) de la fonction f numérisée. Cette remarque s'applique au filtre défini analytiquement. Ainsi, lorsque l'algorithme de convolution utilisé nécessite le passage d'un espace à l'autre, il faut être très vigilant quant à la cohérence entre les deux définitions (expressions et supports). La section 1.1.3 présente la méthodologie qui permet de déterminer la validité de la définition d'une fonction pour un usage numérique de la transformation de Fourier.

Le point déliquant vient du fait que l'on passe d'une transformation de Fourier numérique à une transformation de Fourier continue (et vice versa) de façon plus ou moins transparente.

Reprenons des notations similaires à celles de la section 1.1.3 :

- f_1 est la numérisation du filtre f ;
- \hat{f}_1 est la TFD de la numérisation du filtre f ;
- \hat{f}_2 est la numérisation de la fonction \hat{f} (qui est la TF continue du filtre f) ;
- f_2 est la TFD inverse de la numérisation de la fonction \hat{f} .

Les erreurs qu'il faut surveiller sont la différence ε_F entre \hat{f} et \hat{f}_1 et la différence ε_D entre f et f_2 . L'erreur ε_F augmente avec la diminution du support de f et ε_D augmente avec la diminution du support de \hat{f} . Ainsi, pour avoir une cohérence entre les deux définitions, il faut que ces deux erreurs soient inférieures à l'erreur numérique ε_N des calculs (on peut prendre la convolution directe comme référence). En résumé :

- si ε_F est supérieure à ε_N , il est impossible d'utiliser \hat{f} pour des calculs de convolution ;
- si ε_D est supérieure à ε_N , il est impossible d'utiliser f pour des calculs de convolution.

Notons que si ε_F est supérieure à ε_N , on peut malgré tout employer f avec le support S choisi. En effet, le fait d'avoir un petit support S peut être un choix délibéré visant, par exemple, à « fenêtrer » une fonction h . Mais dans ce cas, l'expression analytique dans l'espace de Fourier de h ne correspond absolument pas à la transformation de Fourier de la fonction h limitée au support S . On peut bien sûr faire la même remarque à propos de \hat{f} et de son support dans l'espace de Fourier.

1.2.8 Complexe-réel

Nous avons vu dans la section 1.1.3 que le calcul de la FFT d'un signal réel est plus rapide que celui de la FFT d'un signal complexe. Ainsi, on peut encore espérer augmenter les performances des calculs lorsque le signal s ou (et) le filtre f est (sont) réel(s). Les tableaux suivants récapitulent la décomposition du calcul pour chaque combinaison.

Tab. 1.2 – Cas numérique

	s réel \hat{s} complexe	s complexe \hat{s} complexe
f réel \hat{f} complexe	convolution réelle	convolution réelle sur $\mathcal{R}(s)$ convolution réelle sur $\mathcal{J}(s)$
f complexe \hat{f} complexe	convolution réelle sur $\mathcal{R}(f)$ convolution réelle sur $\mathcal{J}(f)$	convolution complexe

Tab. 1.3 – Cas analytique

	s réel \hat{s} complexe	s complexe \hat{s} complexe
f réel \hat{f} complexe	convolution réelle	convolution réelle sur $\mathcal{R}(s)$ convolution réelle sur $\mathcal{J}(s)$
f complexe \hat{f} complexe	convolution complexe	convolution complexe

1.2.9 Comparaison des méthodes : temps de calcul

Complexité

Voici un récapitulatif des performances de chaque algorithme en termes de complexité (temps de calcul) et de stockage. Ces valeurs concernent les cas où le filtre est défini numériquement. Dans le cas analytique, elles sont légèrement différentes.

Tab. 1.4 – Performances

méthode de convolution	complexité	stockage
directe	$\mathcal{O}(MN)$	aucun
par morceaux	$\mathcal{O}(LP \log_2(P))$	$4P$
par FFT (périodique)	$\mathcal{O}(N \log_2(N))$	$3N$
par FFT (autres effets de bords)	$\mathcal{O}(N' \log_2(N'))$	$3N'$

Ce tableau indique que le choix de l'algorithme se fait suivant la taille du signal et celle du filtre. Si le filtre est beaucoup plus petit que le signal, il faut utiliser la convolution directe. Si la taille du filtre est de l'ordre de celle du signal, on choisira une convolution par FFT. Dans les situations intermédiaires, c'est la convolution par morceaux qui sera la plus adaptée. Il reste à déterminer les limites qui distinguent l'utilisation de ces algorithmes. Ces limites doivent être estimées dans les conditions réelles de calcul.

Tests de rapidité

Afin de choisir la méthode optimale pour le calcul d'une convolution donnée, il faut pouvoir estimer *a priori* le temps t mis par chaque méthode pour le couple (M, N) considéré. Cette estimation n'est possible que si des calculs préalables ont été effectués pour paramétrer l'évolution de t , dont le comportement est déterminé par l'expression de la complexité de chaque méthode. Ces calculs doivent être effectués dans les conditions d'utilisation de la convolution et sont donc spécifiques à la plate-forme[†]. La plate-forme utilisée est la suivante : bi-processeur PA-RISC 2.0, système HP-UX 10.20, langage C, compilateur cc de HP-UX, bibliothèque FFTW version 2.1.2. Les résultats présentés concernent la convolution entre deux signaux réels. Pour les autres types de convolutions (complexe et/ou avec un filtre analytique), la démarche à suivre est la même.

- **Convolution directe.** Elle a une complexité en $\mathcal{O}(MN)$. Ainsi, en première approximation, le temps de calcul d'une convolution directe se comporte comme $t_1(M, N) = kMN$. Sur la figure 1.14 sont reportées les évolutions de $t_1(M, N)$ lorsque l'on fixe alternativement l'une des deux tailles. La courbe de la figure 1.14b montre que, pour

[†]Nous appelons plate-forme l'ensemble des éléments matériels et logiciels qui influent sur les performances des algorithmes. Dans notre cas, cela comprend le processeur, le système d'exploitation, le langage de programmation, le compilateur et la bibliothèque de calcul de FFT.

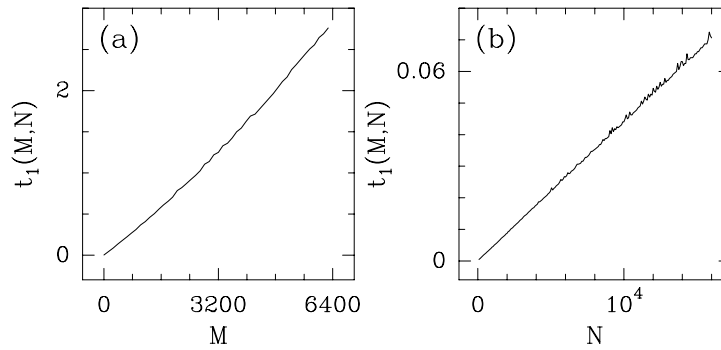


Fig. 1.14 – Évolution de $t_1(M, N)$ en fonction de M pour $N = 12800$ (a) et en fonction de N pour $M = 80$ (b).

M fixé, $t_1(M, N)$ a bien un comportement linéaire en fonction de N . Par contre, le comportement de $t_1(M, N)$ en fonction de M à N (Fig. 1.14a) dévie légèrement de la prédiction en $\mathcal{O}(MN)$. Pour comprendre d'où vient cet écart, il faut évaluer plus précisément le coût de la formule (1.42). Rappelons que les valeurs de s sont implicites. En effet, chaque $s[n]$ est obtenu à partir des valeurs de \tilde{s} par l'intermédiaire de la table 1.1. Sans entrer dans les détails de la mise en œuvre numérique, on constate qu'il y a deux niveaux d'accès aux valeurs $s[n]$. Pour les valeurs de n comprises dans $[0, N[$, cet accès est direct. Pour les autres valeurs de n , l'accès dépend de la gestion des effets de bords. Le temps de calcul de $r[n]$ pour un n donné dépend donc de la position n . Les termes de bords de $r[n]$ mettent en jeu M points et correspondent à un temps de calcul égal à c_1M pour chaque point, où c_1 est une constante. L'ensemble des $N - M$ autres points correspond à un temps de calcul égal à c_2M pour chaque point, où c_2 est une autre constante. Au total, cela nous donne un temps de calcul égal à

$$\begin{aligned} t_1(M, N) &= c_1M^2 + c_2(N - M)M, \\ &= c_2MN + (c_1 - c_2)M^2, \\ &= k_1MN + k_2M^2. \end{aligned} \tag{1.49}$$

De plus, il faut remarquer que pour chaque n , la mise en œuvre numérique de l'algorithme peut entraîner un certain nombre d'opérations indépendantes de M , comme l'initialisation, le test et l'incrément des index de boucles. L'expression du temps t_1 comporte donc un terme indépendant de M . Il faut noter que l'influence de ce terme augmente lorsque M diminue. Il est donc important d'en tenir compte, étant donné que c'est pour les petites valeurs de M que l'on est amené à utiliser l'algorithme de convolution directe. L'expression de t_1 devient par conséquent :

$$t_1(M, N) = k_1MN + k_2M^2 + k_3N. \tag{1.50}$$

La figure 1.15 illustre comment évaluer les trois constantes k_1 , k_2 et k_3 . La courbe de la figure 1.15a représente la valeur de la pente $p_1(M)$ de $t_1(M, N) = p_1(M)N + k_2M^2$

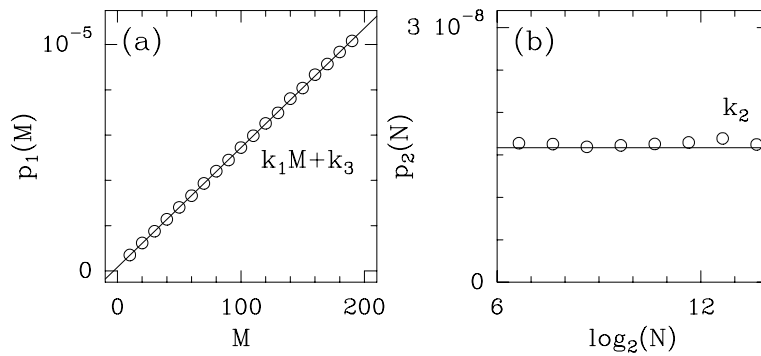


Fig. 1.15 – Estimation des constantes k_1 , k_2 et k_3 dans l'équation (1.50). (a) Évolution de $p_1(M)$ en fonction de M . (b) Évolution de $p_2(N)$ en fonction de $\log_2(N)$.

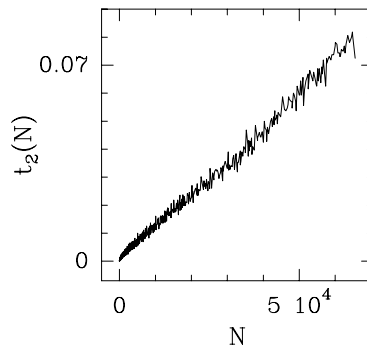


Fig. 1.16 – Évolution de $t_2(N)$ en fonction de N .

pour plusieurs valeurs de M . D'après l'équation (1.50), lorsque M varie, $p_1(M)$ se comporte comme $k_1 M + k_3$. La courbe de la figure 1.15b représente la valeur de la pente $p_2(N)$ de $(t_1(M, N) - k_3 N)/M = p_2(N)M + k_1 N$ pour plusieurs valeurs de N . D'après l'équation (1.50), lorsque N varie, $p_2(N)$ est constante et vaut k_2 .

- **Convolution par FFT.** Elle a une complexité en $\mathcal{O}(N \log_2(N))$. Comme pour la convolution directe, cette complexité n'est qu'une approximation du coût réel. L'estimation du temps t_2 mis par la convolution est étroitement liée à l'algorithme de FFT utilisé; il est donc très délicat de proposer *a priori* un comportement de t_2 . Comme t_2 ne dépend pas de M , on décide d'évaluer $t_2(N)$ pour chaque valeur de N compatible avec l'algorithme de FFT choisi. La figure 1.16 illustre l'évolution de $t_2(N)$ en fonction de N . Précisons que l'aspect bruité de cette courbe ne vient pas d'un bruit numérique, mais correspond à un comportement réel de la valeur $t_2(N)$. Ces fluctuations découlent directement de l'algorithme de FFTW, dont les performances varient fortement d'une valeur de N à l'autre. Dans les cas où la gestion des effets de bords n'est pas périodique, le temps mis par la convolution est $t_2(N')$ où N' est la taille qui minimise t_2 tout en étant supérieure à $N + M - 1$.

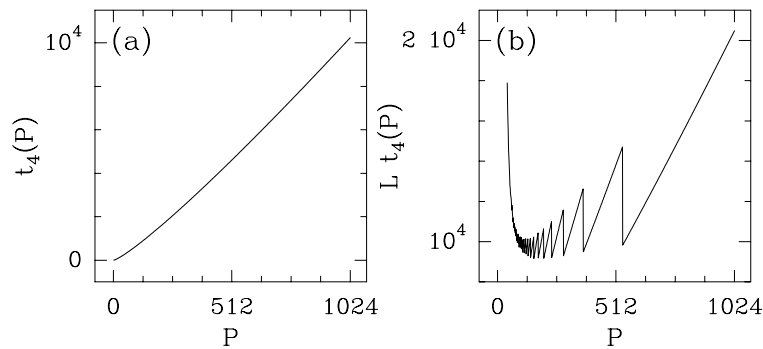


Fig. 1.17 – Calcul de P à partir du comportement théorique pour $N = 1024$ et $M = 30$.
 (a) Temps théorique $t_4(P)$ du traitement d'un morceau en fonction de sa taille P .
 (b) Temps théorique $t_3(P) = Lt_4(P)$ de l'algorithme de convolution par morceaux en fonction de la taille des morceaux.

- **Convolution par morceaux.** Elle a une complexité en $\mathcal{O}(LP \log_2(P))$. L'expression de cette complexité est très peu précise et fournit une approximation peu fiable du coût en temps t_3 de la convolution. À cela s'ajoute le problème de la détermination de P . D'un point de vue théorique, on obtient la valeur de P en minimisant, à M fixé, l'expression $LP \log_2(P)$, avec $L = \lceil \frac{N}{P-M+1} \rceil$. Rappelons que L est le nombre de morceaux et que $P \log_2(P)$ est une approximation du temps théorique mis pour traiter un morceau (voir section 1.2.6), traitement que l'on considère de l'ordre d'une FFT. Appelons $t_4(P)$ le temps mis pour effectuer le traitement sur un morceau. La figure 1.17 illustre comment obtenir la valeur de P dans ce cadre théorique pour $N = 1024$ et $M = 30$. La courbe théorique $t_4(P) = P \log_2(P)$ en fonction de P est représentée sur la figure 1.17a. La figure 1.17b, qui montre le temps théorique t_3 de la convolution par morceaux, permet de trouver la taille P qui donne le calcul le plus rapide. La forme en dents de scie de la fonction $Lt_4(P)$ vient de la borne supérieure dans l'expression de L ($L(P)$ est une fonction escalier décroissante). Cependant, cette estimation dépend fortement de l'approximation de t_4 . De plus, comme pour t_2 , l'algorithme de FFT joue un rôle central. Il est donc souhaitable de mesurer t_4 pour les valeurs de P acceptées par la FFT. La figure 1.18 confirme que le temps $t_4(P)$ est indépendant de M et de N . On constate que, pour une valeur de P donnée, les deux courbes $t_3(M, N)/L$ en fonction de M , pour deux valeurs différentes de N , se remettent l'une sur l'autre pour donner une valeur $t_4(P)$ indépendante de N et de M . On peut ainsi calculer $t_4(P)$ pour chaque valeur de P utilisable. La connaissance de t_4 permet ainsi d'estimer le temps $t_3(M, N)$ pour toutes les valeurs de P , et par là donne accès à la valeur optimum de P . La figure 1.19 illustre la détermination de cette valeur. La figure 1.19a représente t_4 en fonction de P et la figure 1.19b montre l'évolution de $t_3(M, N)$ en fonction de P pour $N = 8192$ et $M = 100$. Cette courbe permet d'obtenir 4802 comme valeur de P , pour laquelle la convolution se fera le plus rapidement pour le couple (M, N) considéré. Ainsi, il est possible d'estimer le temps $t_3(M, N)$ pour n'importe quelles valeurs de M et de N . Les courbes de la figure 1.20 montrent l'évolution de $t_3(M, N)$ en fonction de

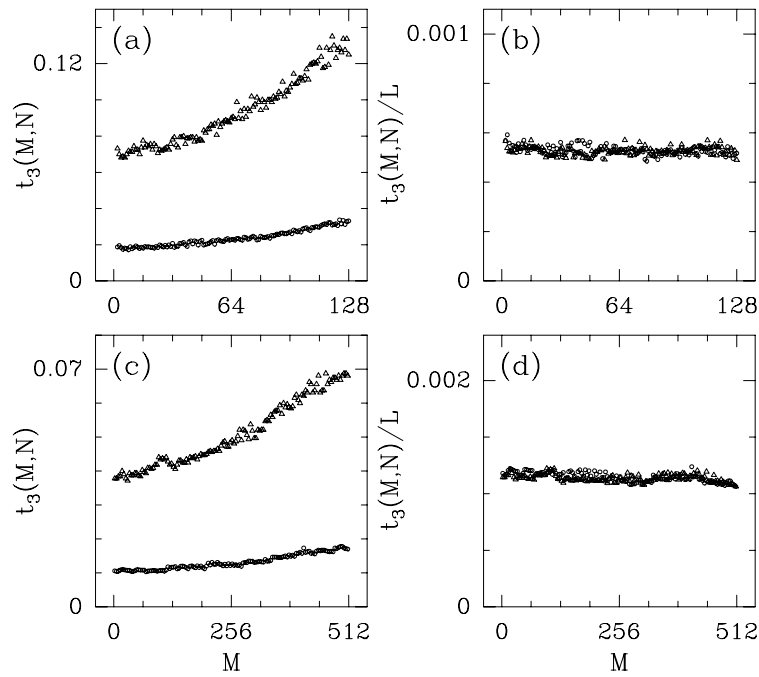


Fig. 1.18 – Indépendance de t_4 par rapport à N et M . (a) et (c) $t_3(M, N)$ en fonction de M à N et P fixés. (b) et (d) $t_3(M, N)/L = t_4(P)$ en fonction de M à N et P fixés. (a) et (b) $P = 256$; (c) et (d) $P = 1024$. (\circ) $N = 8192$; (\triangle) $N = 32768$.

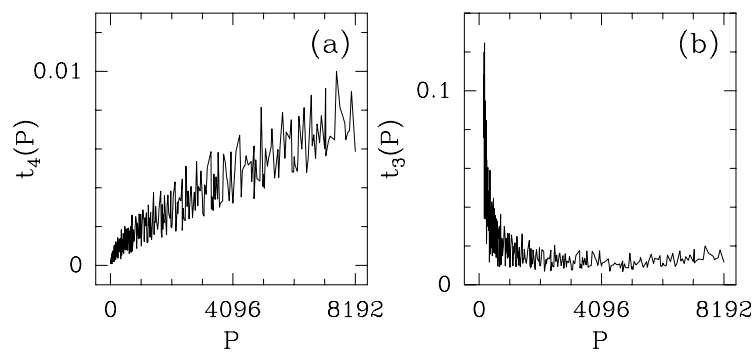


Fig. 1.19 – Calcul de la valeur optimale de P à partir du comportement mesuré pour $N = 8192$ et $M = 100$. (a) Temps mesuré $t_4(P)$ du traitement d'un morceau en fonction de sa taille P . (b) Temps mesuré $t_3(P)$ de l'algorithme de convolution par morceaux en fonction de la taille des morceaux.

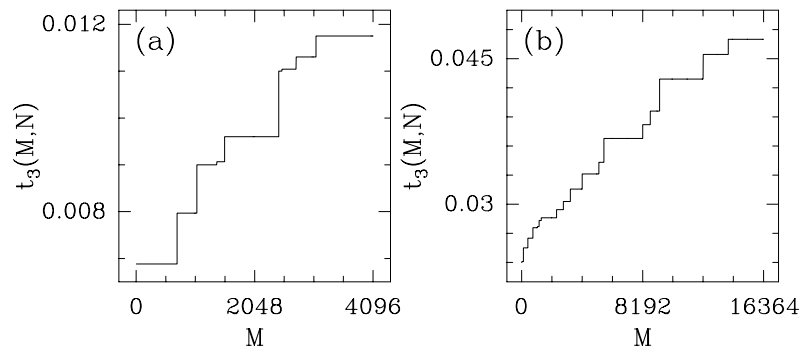


Fig. 1.20 – Évolution de $t_3(M, N)$ en fonction de M pour $N = 8192$ (a) et $N = 32768$ (b).

M pour $N = 8192$ (Fig. 1.20a) et pour $N = 32768$ (Fig. 1.20b). On constate que ces courbes sont en escalier. Cela s'explique par le fait que la valeur de P reste identique sur des intervalles de valeurs de M . En effet, l'expression de L est aussi en escalier : on change de valeur de P lorsqu'on change de marche pour L .

Il est maintenant possible d'estimer *a priori* le temps mis par chaque algorithme de convolution. On peut donc déterminer la méthode optimale pour chaque couple (M, N) . Cela est illustré sur la figure 1.21, où trois zones se partagent le domaine du plan $(\log_2 N, \log_2 M)$ défini par $0 \leq \log_2 M \leq \log_2 N$. La zone A (respectivement B et C) correspond à l'ensemble des couples $(\log_2 N, \log_2 M)$ pour lesquels l'algorithme de convolution discrète (respectivement convolution par morceaux et convolution par FFT) est le plus rapide. Pour N grand, si M est de l'ordre de N on utilise la convolution par FFT, si M est petit devant N on emploie la convolution directe et pour les valeurs de M intermédiaires on se sert de la convolution par morceau. Cette observation va dans le sens de la remarque faite en début de section sur le choix des algorithmes en fonction de leur complexité. Cependant, on constate que ce scénario n'est plus valable pour des petites valeurs de N ($N \lesssim 64$). Pour ces valeurs, l'approximation du temps de calcul qu'est la complexité perd de sa pertinence : les opérations annexes à l'algorithme (comme les allocations de mémoire) et les appels de procédures commencent à ne plus être négligeables devant la stricte application des algorithmes présentés ici. Or ces « surcoûts » sont quasi-inexistants pour la convolution directe : c'est donc cet algorithme qui est optimal pour les petites valeurs de N et pour tout M .

1.2.10 Comparaison des méthodes : erreur

Chacune des méthodes présentées introduit une erreur numérique sur le résultat du calcul. L'origine de cette erreur varie d'une méthode à l'autre. Il est indispensable de la mesurer et de s'assurer qu'elle ne varie pas radicalement lorsque l'on change de méthode. À cette fin, nous allons comparer sur un cas d'école les résultats obtenus par chaque technique.

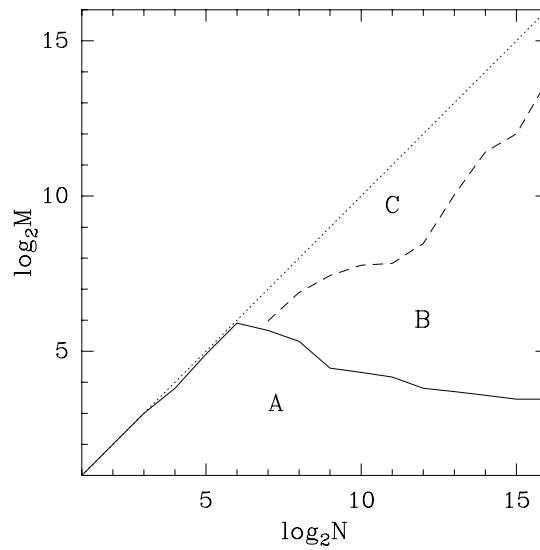


Fig. 1.21 – Choix de la méthode de convolution en fonction des valeurs de $\log_2(N)$ et de $\log_2(M)$: convolution directe (zone A), convolution par morceaux (zone B) et convolution par FFT (zone C).

Calculons la convolution entre un signal linéaire[†] et la dérivée seconde de la Gaussienne (filtre).

$$s(t) = 1000 + t, \quad (1.51)$$

$$f(t) = \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \right) \exp \left(-\frac{t^2}{2\sigma} \right), \quad (1.52)$$

$$\hat{f}(\omega) = -\sqrt{2\pi\sigma} \omega^2 \exp \left(-\frac{\omega^2\sigma}{2} \right). \quad (1.53)$$

Pour toute la série de tests présentée, nous fixons $N = 4096$. L'échantillonnage du filtre se fait toujours sur l'intervalle $[-5.92, 5.92]$. Le pas de cet échantillonnage varie, faisant évoluer le nombre M d'enregistrements du filtre. La figure 1.22 compare les méthodes deux à deux. À M fixé, on mesure la différence entre les résultats r_1 et r_2 des deux convolutions :

$$E(M) = \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon[n]|^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |r_1[n]|^2}}, \quad \text{avec } \varepsilon[n] = r_1[n] - r_2[n]. \quad (1.54)$$

[†]On aurait pu prendre un Dirac comme signal. Dans ce cas, les résultats théoriques sont connus et cela aurait permis une meilleure validation de chaque méthode. Cependant, la TF d'un Dirac ne comporte pas de bruit numérique. Ce cas est trop éloigné des situations réelles et la convolution par FFT aurait été « trop exacte ».

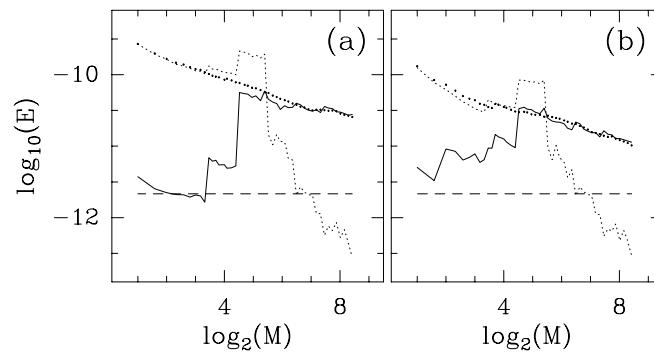


Fig. 1.22 – Erreur entre les résultats des différents algorithmes. La convolution est appliquée entre le signal s (Éq. (1.51)) et le filtre f (Éqs (1.52) et (1.53)). (a) Algorithmes numériques. (b) Algorithmes analytiques. Le trait plein (—) compare la convolution par morceaux à la convolution directe, le trait en pointillés (.....) compare la convolution par morceaux à la convolution par FFT et le trait en pointillés gras (.....) compare la convolution par FFT à la convolution directe. Le trait interrompu (- - -) correspond à l'erreur commise par un « aller-retour » de FFT sur le signal s (Éq. (1.51)).

Chaque courbe de la figure 1.22 montre l'évolution de cette quantité en fonction de la taille M du filtre. La figure 1.22a compare les méthodes numériques entre elles. La figure 1.22b compare les méthodes analytiques entre elles. Dans chacune de ces figures, la courbe en trait continu mesure l'erreur entre la méthode directe et la méthode par morceaux, la courbe en pointillés gras (.....) concerne la méthode par Fourier et la méthode directe, et la courbe en pointillés (.....) la méthode par morceaux et la méthode par Fourier. On constate pour ce dernier cas que lorsque la taille augmente l'erreur diminue. Cela est assez intuitif, car la méthode par morceaux s'apparente à la méthode par Fourier lorsque la taille du filtre augmente. Sur les deux sous-figures, le trait interrompu indique l'erreur obtenue lorsque l'on compare le signal s (Éq. (1.51)) avec la FFT inverse de sa FFT. Notons que les courbes qui font intervenir la convolution par morceaux présentent un aspect en escalier qui provient des changements de valeur de la taille P des morceaux sur lesquels on effectue les FFT (voir page 29). Or, cette taille a une conséquence directe sur l'erreur commise par la FFT : elle diminue lorsque la taille augmente. La décroissance par morceaux observée sur toutes les courbes provient de l'amélioration de la résolution du filtre. On constate que les erreurs dans la figure 1.22b sont plus faibles que celles dans la figure 1.22a. Encore une fois, il faut chercher l'explication au niveau de l'utilisation de la FFT : dans le cas analytique, on effectue une FFT de moins par rapport au cas numérique, diminuant ainsi l'erreur commise.

1.3 Transformation en ondelettes de signaux 1D

La transformation en ondelettes est un outil d'analyse et de traitement du signal qui permet d'étudier la structure d'un signal en fonction de l'échelle d'observation [22–37]. La numérisation de cet outil utilise directement des algorithmes de convolution. Une attention

particulière doit donc être portée sur la définition de l'ondelette en tant que filtre d'un algorithme numérique.

1.3.1 Définition

On appelle ondelette [26, 27, 29, 35–37], toute fonction ψ de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (1.55)$$

et telle que sa norme \mathbf{L}^2

$$\|\psi\| = 1. \quad (1.56)$$

On appelle $\psi_{b,a}$, la version dilatée et translatée de l'ondelette ψ :

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (1.57)$$

avec la condition de normalisation

$$\|\psi_{b,a}\| = 1. \quad (1.58)$$

Soit f une fonction complexe de la variable temporelle t prise dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Sa *transformée en ondelettes* est définie par [26, 27, 29, 35–37]

$$T_f(b, a) = \langle \psi_{b,a}, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (1.59)$$

La variable a est appelée variable d'échelle. Si pour simplifier nous adoptons la notation

$$\bar{\psi}_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{-t}{a}\right), \quad (1.60)$$

alors la transformée en ondelettes de f s'écrit sous la forme d'un produit de convolution :

$$T_f(b, a) = f \star \bar{\psi}_a(b). \quad (1.61)$$

Remarquons que l'équation (1.61) implique la validité de la condition d'admissibilité – pour que la transformation en ondelettes soit inversible. L'inverse n'est pas nécessairement vrai.

1.3.2 Ondelette : filtre à taille variable

La formule (1.61) fait intervenir un produit de convolution sur la fonction f . Lors de l'évaluation numérique de la transformée en ondelettes, il est donc nécessaire de faire appel à un algorithme de convolution. Le filtre de la convolution dépend directement de l'ondelette (forme) et de l'échelle a (taille). Le support du filtre dans l'espace direct augmente donc avec a . Nous avons vu que le choix de l'algorithme de convolution dépend de la taille du support du filtre. Ainsi, le calcul de la transformée en ondelettes sur une gamme d'échelles importante nécessite l'utilisation de plusieurs algorithmes de convolution. Toutes les remarques de la section précédente (voir page 22) concernant la cohérence d'un filtre sont donc très importantes dans la mise en œuvre d'algorithmes de calcul de la transformée en ondelettes : la définition d'une ondelette en tant que filtre est en effet très délicate. Une attention particulière doit être portée sur la définition des supports dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier (voir section 1.1.3), ainsi que sur la cohérence entre ces formes dans les deux espaces. Cependant, si l'on se limite aux algorithmes de convolution numérique, il n'est pas nécessaire de définir la forme de l'ondelette dans l'espace de Fourier.

Une autre contrainte à respecter est la normalisation de l'ondelette (Éq. (1.58)). Dans un cadre numérique, cela revient à s'assurer que la somme des modules des enregistrements soit bien égale à 1. Si l'on s'écarte de cette valeur, on divise le résultat des convolutions par la valeur de cette somme.

1.3.3 Gamme d'échelles accessible

Il est important de noter que la taille du support de l'ondelette dans l'espace direct détermine l'échelle maximale accessible pour un signal de taille donnée. De même, la taille du support de l'ondelette dans l'espace de Fourier détermine l'échelle minimale, c'est-à-dire la résolution maximale de notre microscope « transformée en ondelettes » [33]. Soient $[t_{min}, t_{max}]$ le support de ψ et $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ le support de $\hat{\psi}$. Cherchons la gamme d'échelles accessible pour calculer la transformée en ondelettes d'un signal de N points (échantillonnage $T = 1$). Lors de ce calcul, on est amené à numériser l'ondelette. L'intervalle d'échantillonnage doit contenir le support de l'ondelette à l'échelle considérée. Dans l'espace direct, le pas est $T = 1$. Ainsi, l'intervalle d'échantillonnage est $[[at_{min}], [at_{max}]]$. Il faut que le nombre de points d'échantillonnage ne dépasse pas N . Il y a $[at_{max}] - [at_{min}] + 1$ points qui définissent l'ondelette à cette échelle, nombre qui est majoré par la valeur réelle $at_{max} - at_{min} + 3$. Ainsi, nous fixons l'échelle maximale a_{max} à la valeur

$$a_{max}t_{max} - a_{max}t_{min} + 3 = N, \quad \text{soit} \quad a_{max} = \frac{N - 3}{t_{max} - t_{min}}. \quad (1.62)$$

La plus petite échelle est atteinte lorsque l'intervalle d'échantillonnage de $\hat{\psi}_{b,a}$ sort de l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Le pas d'échantillonnage est $T = \frac{2\pi}{N}$ et l'intervalle d'échantillonnage est

$[\lfloor \frac{\omega_{min}}{aT} \rfloor T, \lceil \frac{\omega_{max}}{aT} \rceil T]$. Toute échelle a doit être supérieure aux échelles a_1 et a_2 définies par

$$\left(\frac{\omega_{min}}{a_1 T} - 1\right) T = -\pi, \quad (1.63)$$

$$\left(\frac{\omega_{max}}{a_2 T} + 1\right) T = \pi, \quad (1.64)$$

ce qui nous donne

$$a_1 = \frac{\omega_{min}}{\pi \left(\frac{2}{N} - 1\right)}, \quad (1.65)$$

$$a_2 = \frac{\omega_{max}}{\pi \left(1 - \frac{2}{N}\right)}. \quad (1.66)$$

Ainsi, nous fixons l'échelle minimale à la valeur

$$a_{min} = \max(a_1, a_2) = \frac{\max(-\omega_{min}, \omega_{max})}{\pi \left(1 - \frac{2}{N}\right)}. \quad (1.67)$$

1.3.4 Exemples d'ondelettes pour le calcul numérique

Voici une liste d'ondelettes avec leur définition et leurs caractéristiques telles qu'elles peuvent être utilisées pour un calcul numérique. Leur support a été déterminé grâce à une méthode proche de celle présentée dans la page 10. On se donne un seuil de tolérance sur l'erreur commise en limitant ψ (resp. $\hat{\psi}$) sur un intervalle donné. Appellons ψ_1 (resp. $\hat{\psi}_2$) cette limitation. L'erreur est calculée en comparant (numériquement) $\hat{\psi}_1$ à $\hat{\psi}$ (resp. ψ_2 à ψ). Le support choisi pour ψ (resp. pour $\hat{\psi}$) est le plus petit intervalle pour lequel cette erreur est inférieure à une valeur donnée. La plupart des ondelettes présentées ici sont des dérivées successives de la fonction Gaussienne [25] :

$$g(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right). \quad (1.68)$$

Tab. 1.5 – Exemples d’ondelettes

	espace direct		espace de Fourier	
$\frac{dg}{dx}$	$-x \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ $x \in [-5.605, 5.605]$		$\sqrt{2\pi}i\omega \exp\left(\frac{-\omega^2}{2}\right)$ $\omega \in [-5.762, 5.762]$	
$\frac{d^2g}{dx^2}$	$(x^2 - 1) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ $x \in [-5.918, 5.918]$		$-\sqrt{2\pi}\omega^2 \exp\left(\frac{-\omega^2}{2}\right)$ $\omega \in [-6.094, 6.094]$	
$\frac{d^3g}{dx^3}$	$x(3 - x^2) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ $x \in [-6.230, 6.230]$		$-\sqrt{2\pi}i\omega^3 \exp\left(\frac{-\omega^2}{2}\right)$ $\omega \in [-6.406, 6.406]$	
$\frac{d^4g}{dx^4}$	$(3 - 6x^2 + x^4) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ $x \in [-6.543, 6.543]$		$\sqrt{2\pi}\omega^4 \exp\left(\frac{-\omega^2}{2}\right)$ $\omega \in [-6.719, 6.719]$	
Morlet [22–24]	$\cos(x\Omega) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ $+i \sin(x\Omega) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ $x \in [-5.260, 5.260]$		$\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{-(\omega-\Omega)^2}{2}\right)$ $\omega \in [-0.1, 10.9]$	

Précisons que les formules proposées dans cette table pour l’ondelette de Morlet ne vérifient pas la condition de moyenne nulle (Éq. (1.55)). Cependant, la valeur de $\Omega = 5.336446$ a été choisie de telle sorte que, d’un point de vue numérique, on puisse faire l’approximation $\hat{\psi}(0) = 0$.

1.4 Algorithmes pour les images numérisées

1.4.1 Transformation de Fourier à deux dimensions

Sans entrer dans les détails, signalons simplement que la TF se généralise très bien aux fonctions de deux variables [36,52,53] (et même de n variables). Ainsi, l’algorithme de TFD (et donc celui de FFT) possède un équivalent pour les images (signaux à deux dimensions). Il s’agit en fait d’effectuer une série de TFD à une dimension sur chaque ligne, suivie d’une série sur chaque colonne. Si $N = N_x N_y$ est le nombre de points de l’image (N_x est le nombre de colonnes, N_y est le nombre de lignes), on obtient encore une complexité en $\mathcal{O}(N \log_2 N)$. Voici les formules qui définissent la TF et la TFD (et leur inverse) pour les images [36,52,53] :

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy ; \quad (1.69)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega_x, \omega_y) e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y ; \quad (1.70)$$

$$\hat{f}[k_x, k_y] = \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} f[n_x, n_y] \exp \left(-i2\pi \left(\frac{k_x n_x}{N_x} + \frac{k_y n_y}{N_y} \right) \right); \quad (1.71)$$

$$f[n_x, n_y] = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} \hat{f}[k_x, k_y] \exp \left(i2\pi \left(\frac{k_x n_x}{N_x} + \frac{k_y n_y}{N_y} \right) \right). \quad (1.72)$$

1.4.2 Convolution à deux dimensions

Comme pour la transformée de Fourier, la convolution se généralise très bien à plusieurs dimensions [36, 57]. Que ce soit pour les définitions, les propriétés, la gestion des effets de bords ou la complexité des algorithmes, le passage à la convolution pour les images se fait très simplement. Ainsi, si f et h sont deux fonctions complexes des variables x et y , on définit le *produit de convolution 2D* de f avec h par

$$f \star h(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_x, u_y) h(x - u_x, y - u_y) du_x du_y. \quad (1.73)$$

Si les fonctions f et h sont discrètes, avec un même pas T_x suivant la composante x et un même pas T_y suivant la composante y , l'intégrale (1.73) se reformule de la manière suivante :

$$f \star h[n_x, n_y] = \sum_{p_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{p_y=-\infty}^{+\infty} f[p_x, p_y] h[n_x - p_x, n_y - p_y], \quad (1.74)$$

avec $f[n_x, n_y] = f(n_x T_x, n_y T_y)$ et $h[n_x, n_y] = h(n_x T_x, n_y T_y)$. Dans ce cas de figure, on parlera de *convolution discrète 2D*. Si de plus f et h sont $N_x T_x$ -périodiques suivant la composante x et $N_y T_y$ -périodiques suivant la composante y , on définit la *convolution circulaire 2D* par

$$f \star h[n_x, n_y] = \sum_{p_x=0}^{N_x-1} \sum_{p_y=0}^{N_y-1} f[p_x, p_y] h[n_x - p_x, n_y - p_y]. \quad (1.75)$$

Le résultat de cette opération est aussi une fonction $N_x T_x$ -périodique suivant la composante x et $N_y T_y$ -périodique suivant la composante y . La convolution circulaire 2D possède la propriété remarquable suivante :

$$\text{si } g[n_x, n_y] = f \star h[n_x, n_y], \quad \text{alors } \hat{g}[k_x, k_y] = \hat{f}[k_x, k_y] \hat{h}[k_x, k_y]. \quad (1.76)$$

L'application des différents algorithmes de convolution (directe, par morceaux ou par FFT) découle de ces formules et n'ajoute pas de difficultés par rapport au cas à une dimension.

Les complexités restent les mêmes si l'on prend en considération le nombre de points de l'image $N = N_x N_y$. La gestion des effets de bords se fait en appliquant sur chaque direction la stratégie de la section 1.2.4 (voir table 1.1).

En ce qui concerne la comparaison des différents algorithmes en terme de rapidité, l'ajout d'une dimension amène un degré de liberté supplémentaire. En toute rigueur, et pour s'adapter au cas le plus général, il faudrait prendre en compte l'incidence des deux directions sur les performances de l'algorithme de FFT[†]. Cependant, la plupart des images rencontrées ont une largeur proche de leur longueur (lorsqu'elles ne sont pas égales). Dans ces conditions, la démarche présentée dans la section 1.2.9 pour estimer les temps d'exécution de chaque algorithme se généralise à deux dimensions en prenant simplement en considération le nombre total de points de l'image.

1.4.3 Transformée en ondelettes continue à deux dimensions

Encore une fois, l'ajout d'une dimension pour le calcul de la transformée en ondelettes n'augmente pas les difficultés de manière significative [61–64]. Les définitions et propriétés sont les mêmes qu'à une dimension. Dans les formules de la section 1.3.1, il faut prendre les variables t et b comme des vecteurs et les intégrales deviennent doubles. Ainsi, on appelle ondelette toute fonction ψ de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad (1.77)$$

et telle que sa norme \mathbf{L}^2

$$\|\psi\| = 1. \quad (1.78)$$

On appelle $\psi_{\mathbf{b},\theta,a}$, la version translatée (\mathbf{b}), tournée (θ) et dilatée (a) de l'ondelette ψ :

$$\psi_{\mathbf{b},\theta,a}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a} \psi \left(\frac{r_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{b})}{a} \right), \quad (1.79)$$

avec la condition de normalisation

$$\|\psi_{\mathbf{b},\theta,a}\| = 1. \quad (1.80)$$

Soit f une fonction complexe de la variable \mathbf{x} prise dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$; sa *transformée en ondelettes* est définie par

$$T_f(\mathbf{b}, \theta, a) = \langle \psi_{\mathbf{b},\theta,a}, f \rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \frac{1}{a} \psi^* \left(\frac{r_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{b})}{a} \right) d\mathbf{x}. \quad (1.81)$$

[†]Lorsque le nombre de points $N = N_x N_y$ est fixé mais que l'on fait varier N_x et N_y , les performances peuvent devenir très différentes. Surtout lorsque l'on passe de $N_x \sim N_y$ à $N_x = N$ et $N_y = 1$ (ou vice versa).

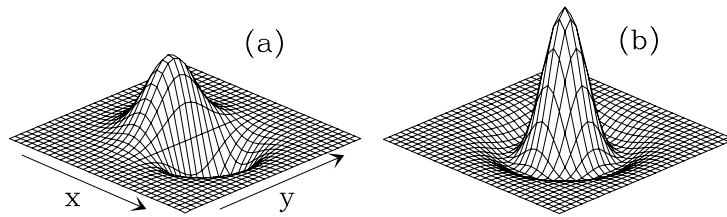


Fig. 1.23 – Exemples d'ondelettes 2D. (a) Dérivée première de la Gaussienne suivant x : $-x \exp(-(x^2 + y^2)/2)$. (b) Chapeau mexicain à 2D : $(x^2 + y^2 - 1) \exp(-(x^2 + y^2)/2)$.

La variable a est appelée variable d'échelle. Si pour simplifier nous adoptons la notation

$$\bar{\psi}_{\theta,a}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a} \psi^* \left(\frac{r_{-\theta}(-\mathbf{x})}{a} \right), \quad (1.82)$$

alors la transformée en ondelettes de f s'écrit sous la forme d'un produit de convolution :

$$T_f(\mathbf{b}, \theta, a) = f \star \bar{\psi}_{\theta,a}(\mathbf{b}). \quad (1.83)$$

Dans ces formules, l'angle θ fournit un degré de liberté supplémentaire par rapport à la transformée en ondelettes 1D. Cependant, d'un point de vue algorithmique, cet angle n'ajoute aucune difficulté majeure. L'impact se situe au niveau des performances (temps de calcul et stockage). La figure 1.23 présente deux exemples d'ondelettes analysatrices 2D : la dérivée première suivant x de la fonction Gaussienne et le chapeau mexicain 2D. L'obtention des échelles limites doit se faire en prenant en considération la taille du filtre et la taille de l'image successivement dans les deux directions. Toutes les autres considérations d'ordre numérique ou algorithmique découlent directement du cas à une dimension.

1.5 Petit récapitulatif

Ce chapitre a traité de l'optimisation du temps de calcul de la transformée en ondelettes à une ou deux dimensions. À défaut d'optimisation, le choix le plus simple et le plus fréquent dans la littérature consiste à calculer chaque échelle avec une convolution par FFT. Ainsi, si N_e est le nombre total d'échelles à calculer, le temps mis est de N_e fois le temps d'une convolution par FFT. L'optimisation présentée dans ce chapitre permet de limiter aux grandes échelles l'emploi de la convolution par FFT. Toutes les autres échelles font appel aux algorithmes de convolution directe et par morceaux, qui sont nettement plus rapides. Le gain dépend donc de l'étendue de la gamme d'échelles. Si celle-ci comporte peu d'échelles proches de la taille du signal, le gain sera important. Si au contraire elle ne contient que des grandes échelles, alors le gain sera faible, voire nul. Heureusement, ce dernier cas est rare, pour ne pas dire inexistant. En effet, l'un des intérêts majeurs de la transformée en ondelettes continue est de pouvoir observer l'évolution de la structure du signal lorsque l'on diminue progressivement le paramètre d'échelle (c'est-à-dire lorsque l'on

augmente le grossissement du microscope « transformation en ondelettes » [33, 38, 63–65]). Ainsi, la primeur est donnée aux petites échelles. De plus, les grandes échelles sont polluées par les effets de bords[†], ce qui rend délicate leur exploitation. En ce qui concerne le choix de l’algorithme de convolution, nous avons présenté une démarche qualitative qui rend compte des différences algorithmiques des trois méthodes (directe, par morceaux, par FFT). Cette démarche n’est pas exhaustive et peut être sujette à critiques : problème d’estimation, place mémoire, temps de prétraitement, etc. Elle constitue cependant un compromis acceptable entre les différentes contraintes de mise en œuvre. Une amélioration possible en place mémoire pourrait être obtenue par la définition de formes analytiques, modélisant d’une part le temps mis pour effectuer une FFT et d’autre part le temps mis pour la convolution d’un morceau. Une autre approche envisageable (à l’opposé de la précédente) serait de calculer une table d’aiguillage à deux entrées (la taille du signal et celle du filtre) qui indiquerait la méthode optimum pour chaque jeu de paramètres. Toutefois, le gain en précision se ferait alors au détriment du stockage et de l’estimation de cette table. En plus de l’optimisation en terme de vitesse, nous avons également évoqué le problème délicat de la définition d’un filtre numérique (ou d’une ondelette) à partir de sa définition analytique, et ce dans l’espace direct comme dans l’espace de Fourier. Nous avons ainsi déterminé avec précision la gamme d’échelles accessible par une ondelette suivant la taille du signal analysé. Nous espérons pouvoir mettre prochainement à disposition sur le site Internet du CRPP, une mise en œuvre des algorithmes présentés dans ce chapitre.

[†]Cette remarque ne s’applique pas, bien évidemment, aux signaux dont le comportement est connu hors du domaine des données, comme par exemple un signal périodique ou un signal dont le support correspond à un sous-ensemble des données disponibles.

Chapitre 2

La méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO) en dimension 2 : méthodologie et tests

2.1 Introduction

La fin des années 70 et le début des années 80 ont vu la naissance et la propagation dans la communauté scientifique de la notion de *fractale* [2,3]. Cette notion s'est très largement répandue dans les différents domaines de la physique et de la physico-chimie des interfaces [5–15]. Aussi bien au niveau fondamental qu'au niveau des nombreuses applications potentielles, la caractérisation des surfaces rugueuses est devenue un problème d'importance majeure. En effet, beaucoup de processus naturels ou artificiels conduisent à la formation de profils irréguliers ou d'interfaces complexes [2,3,5–21]. De nombreuses techniques expérimentales sont couramment utilisées de nos jours pour caractériser la rugosité d'une surface. Certaines de ces techniques telles que la microscopie à effet tunnel, la microscopie à force atomique, la microscopie électronique à transmission ou l'imagerie optique, donnent accès à l'objet dans l'espace direct [14]. Les techniques de diffraction (électrons, lumière, rayons X) opèrent par contre dans l'espace de Fourier [14]. La caractérisation de la rugosité d'une surface par la mesure de sa dimension fractale est devenue monnaie courante dans beaucoup d'applications comme par exemple la topographie, l'étude de réseaux de défauts

ou de fractures, les phénomènes de croissance, les processus d'érosion et de corrosion, la catalyse et bien d'autres domaines en physique, chimie, biologie, géologie, météorologie et sciences des matériaux [2, 3, 5–20]. En ce qui concerne les interfaces *isotropes* et *autosimilaires*, il existe une pléthore d'algorithmes (comptage de boîtes, corrélations à taille ou à masse fixée) qui ont été testés et qui permettent une estimation suffisamment précise de la dimension fractale D_F [44, 63, 65–71]. Par contre, pour les surfaces rugueuses *autoaffines* qui possèdent des propriétés d'invariance d'échelle *anisotropes* [2, 3, 6, 7, 9, 72–74], les différentes méthodes d'évaluation de D_F (méthode du diviseur, algorithme de comptage de boîtes, méthode du triangle, méthode SI – de l'anglais *slit-island* –, méthode spectrale, méthode du variogramme et méthode des distributions) fournissent le plus souvent des résultats différents [74–79]. Il est désormais bien établi que les effets d'échantillonnage (résolution limitée) et de taille finie sont à l'origine de biais dans l'estimation de D_F . De plus, ces biais sont plus ou moins importants suivant la méthode utilisée [75, 79, 80]. Pour une discussion documentée sur les raisons possibles de ces variations dans l'estimation de la dimension fractale de surfaces rugueuses, nous renvoyons le lecteur à l'article de Lea Cox et Wang [81]. Une alternative consiste à calculer l'*exposant de rugosité* H [2, 3, 6, 9] qui détermine l'agrandissement qu'il faut appliquer à l'épaisseur de l'interface afin de conserver l'aspect de la surface lors d'une dilatation spatiale donnée. Si d est la dimension de l'espace dans lequel se trouve la surface étudiée, l'exposant de rugosité est supposé être relié à la dimension fractale par la formule $D_F = d - H$. Il existe plusieurs méthodes qui permettent d'évaluer cet exposant parmi lesquelles les plus utilisées sont certainement les méthodes de la variance et du spectre de puissance, les fonctions de corrélation, la méthode DFA (de l'anglais *detrended fluctuations analysis*), les distributions de probabilité de premier et de multiretour [76–79, 82–85]. À nouveau, des biais perturbent l'estimation de l'exposant de rugosité [79], et comme la précision dépend sensiblement de la méthode utilisée, il est fortement conseillé d'appliquer plusieurs techniques afin de pouvoir quantifier la précision avec laquelle la mesure est effectuée.

Cependant, au delà des limitations algorithmiques, la méthodologie basée sur la simple mesure de la dimension fractale souffre d'une insuffisance beaucoup plus fondamentale. En effet, D_F et H sont des quantités globales qui ne rendent pas compte de possibles fluctuations locales de la rugosité d'une surface fractale. À cet effet, les algorithmes de comptage de boîtes et de corrélations ont été adaptés afin de permettre le calcul des *dimensions fractales généralisées* D_q [44, 63, 65, 67–70]. La dépendance de ces dimensions en fonction de q permet en effet de quantifier l'existence de propriétés d'invariance d'échelle *multifractales* dans les objets autosimilaires isotropes. En ce qui concerne les fractales autoaffines, dans le contexte de l'étude de la turbulence pleinement développée, Parisi et Frisch [86] ont proposé une description multifractale basée sur l'étude du comportement en loi de puissance des fonctions de structure [20, 87] : $S_p(l) = \langle (\delta f_l)^p \rangle \sim l^{\zeta_p}$ (p entier > 0), où $\delta f_l(x) = f(x+l) - f(x)$ est un incrément du signal sur une distance l . En redéfinissant l'exposant de rugosité comme une quantité locale, $\delta f_l(x) \sim l^{h(x)}$ [46–48, 86, 88, 89], on peut alors quantifier les fluctuations de régularité de la fonction considérée à l'aide du *spectre des singularités* $D(h)$, où $D(h)$ est la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points x pour lesquels l'exposant de rugosité local $h(x)$ (appelé aussi *exposant de Hölder*)

vaut h . En principe $D(h)$ peut être obtenu par transformation de Legendre des exposants ζ_p [46, 48, 86]. Cependant, comme l'ont souligné Muzy *et al* [49], la méthode des fonctions de structure présente d'importantes lacunes. En particulier, elle ne permet pas d'accéder à la totalité du spectre $D(h)$. On peut en effet montrer que cette méthode est aveugle aux singularités les plus faibles (comme celles présentes dans les dérivées de f). Ainsi, même s'il est possible, en considérant la valeur absolue des incréments, d'étendre cette approche aux valeurs réelles positives de p (et non plus se limiter aux seules valeurs entières), les fonctions de structure n'existent pas pour $p < 0$. De plus, la présence possible dans f de singularités d'exposant de Hölder $h > 1$ ou de comportements réguliers, affecte de façon sérieuse l'estimation des exposants ζ_p et par conséquent le calcul du spectre des singularités $D(h)$ via la transformation de Legendre [46, 48, 49].

Récemment, Arneodo en collaboration avec Bacry et Muzy [46–50] ont présenté une nouvelle méthode permettant d'effectuer une étude multifractale des fonctions autoaffines et multiaffines. Cette approche plus naturelle du problème suggère d'utiliser la *transformée en ondelettes continues* [22–38], là où le formalisme multifractal classique proposait l'utilisation de boîtes [39–45]. Par leur grande variété, les « boîtes oscillantes généralisées » que sont les ondelettes permettent de s'affranchir des composantes douces qui peuvent soit masquer les singularités, soit perturber l'estimation de leur force h [46–50]. De plus, le squelette défini par les *maxima du module de la transformée en ondelettes* (MMTO) [90, 91] fournit un partitionnement naturel du demi-plan espace-échelles dont on peut se servir pour positionner de façon efficace nos « boîtes oscillantes ». En observant le comportement en loi d'échelle de fonctions de partition calculées sur ce squelette, on peut ainsi extraire les exposants $\tau(q)$, qui, par transformation de Legendre, donne accès au spectre des singularités $D(h)$ dans sa totalité : $D(h) = \min_q(qh - \tau(q))$ (voir les Réfs [50, 92] pour des résultats mathématiques rigoureux). Cette méthode, appelée méthode MMTO [46–50], étant principalement destinée à être appliquée à des systèmes stochastiques, il faut cependant être conscient que le traitement des fonctions aléatoires multifractales nécessite un soin et des précautions particulières. *A priori*, il n'y a pas de raison que toutes les réalisations d'un même processus stochastique multifractal correspondent à une courbe $D(h)$ unique. Chaque réalisation possède sa propre distribution de singularités et un point délicat de l'analyse est de relier ces distributions à une moyenne calculée expérimentalement. Comme l'a parfaitement souligné Hentschel [93], on peut tirer partie de l'analogie entre la description multifractale et la thermodynamique statistique [39, 40, 44–46], en utilisant les méthodes conçues spécialement pour étudier le désordre dans la théorie des verres de spin [94]. On peut ainsi calculer des moyennes sur les répliques d'une fonction de partition aléatoire associée à une fonction stochastique, pour en extraire le spectre multifractal $\tau(q, n)$ qui dépend généralement du nombre de membres n dans la moyenne sur les répliques (précisons que $n = 0$ et $n = 1$ correspondent respectivement aux moyennes trempée et recuite [93]). Ainsi, en appliquant la transformation de Legendre à $\tau(q, n)$, on obtient une moyenne particulière du spectre $D(h)$ [93]. L'interprétation de ces spectres moyennés doit donc se faire avec beaucoup de prudence afin d'éviter toute erreur de compréhension de la physique sous-jacente.

La méthode MMTO a déjà été appliquée avec succès à de nombreux signaux 1D expé-

rimentaux comme numériques d'origines variées [33]. Parmi les succès enregistrés, nous mentionnerons principalement la caractérisation du phénomène de cascade en turbulence pleinement développée [38, 46–48, 95–100], la découverte de suites de Fibonacci dans la structure hiérarchique de coupes 1D d'agrégats fractals générés par des processus de croissance limitée par la diffusion (DLA) [101–105], la caractérisation et la compréhension des corrélations à longue portée observées dans les séquences d'ADN [106–109], la démonstration de l'existence d'une cascade d'information causale des grandes vers les petites échelles dans les séries financières [110, 111]. D'un point de vue fondamental, le formalisme multifractal basé sur la méthode MMTO [46–50] fournit une description statistique « *canonique* » des fluctuations de régularité d'une fonction qui ne prend effectivement en compte que les *singularités algébriques* (*cusps*, en anglais). Dans un souci de généralité, ce formalisme a été récemment étendu [112–115] aux *singularités oscillantes* (*chirps*, en anglais) [91, 112, 113, 116], débouchant sur une description « *grand canonique* » basée sur le calcul du spectre des singularités $D(h, \beta)$ qui quantifie désormais la contribution statistique des singularités d'exposant de Hölder h et d'exposant d'oscillation β caractérisant la divergence en loi de puissance locale de la fréquence instantanée.

Le but de ce chapitre est de généraliser la méthode MMTO canonique [46–50] du cas 1D au cas 2D, afin de permettre l'analyse multifractale de surfaces rugueuses dont la dimension fractale D_F est comprise entre 2 et 3. Durant ces dernières années, un intérêt croissant s'est porté vers l'application de la transformée en ondelettes (TO) au traitement et à l'analyse d'images [32, 33, 36, 63, 64, 117, 118]. Dans ce contexte, Mallat et ses collaborateurs [90, 91] ont généralisé la représentation MMTO au cas à deux dimensions en s'inspirant des techniques de détection de contours de Canny utilisées en vision par ordinateur [119]. Nous allons utiliser cette représentation afin de définir le squelette 3D de la TO à partir duquel nous calculerons les fonctions de partition permettant d'accéder aux spectres multifractals. Les grandes lignes de cette approche, accompagnées de quelques applications préliminaires à des données synthétiques et expérimentales, ont été présentées dans une précédente publication [120]. Ce chapitre a pour objectif de fournir une description détaillée de la méthode MMTO à 2D. Pour illustrer l'efficacité et la fiabilité de cette méthode, nous allons l'appliquer à des surfaces aléatoires autoaffines synthétiques possédant des propriétés d'invariance d'échelle isotropes ou anisotropes (par rapport aux variables d'espace).

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 2.2, nous commençons par présenter les fondements de la transformation en ondelettes continue en dimension 2 [36, 61–64]. Nous décrivons ensuite la représentation MMTO 2D introduite par Mallat *et al* [90, 91] comme l'équivalent multiéchelle des techniques de détection de contours proposées par Canny [119]. Dans la section 2.3, nous comparons la TO continue à un microscope mathématique conçu pour caractériser la régularité locale des surfaces rugueuses. Nous mettons l'accent, d'un point de vue pratique, sur l'avancée technologique que constitue la représentation MMTO, outil numérique très efficace pour détecter les singularités d'une surface fractale. Dans la section 2.4, nous présentons la méthode MMTO 2D comme une généralisation naturelle des algorithmes de comptage de boîtes et des techniques de fonctions de structure utilisés jusqu'à présent pour l'analyse multifractale d'interfaces isotropes autosimilaires et de surfaces multi-affines. La section 2.5 est consacrée à l'application de la

méthode MMT0 2D à des surfaces Browniennes et Browniennes fractionnaires [2, 3, 6, 72] qui présentent des propriétés d'invariance d'échelle isotropes par rapport aux variables d'espace. C'est dans cette section que nous discutons, avec un soin tout particulier, les problèmes de convergence statistique et d'effets de taille finie. Dans la section 2.6, nous montrons que la MMT0 2D est capable de révéler et de quantifier la présence d'une anisotropie dans les fluctuations de rugosité d'une surface aléatoire. Sur un plan plus général, nous concluons dans la section 2.7, en mettant en exergue le fait que la MMT0 2D peut être utilisée dans de nombreux domaines de l'analyse et du traitement de l'image comme par exemple la détection de contours, la reconnaissance de formes, le débruitage ou la compression d'images.

2.2 Traitement et analyse d'image par transformation en ondelettes continue 2D

Dans cette section nous présentons rapidement la transformation en ondelettes continue à deux dimensions [61–64]. En particulier nous exposons l'approche de Mallat et ses collaborateurs [90, 91] qui consiste à appliquer une version multiéchelle de la technique de détection de contour proposée par Canny [119]. Nous renvoyons le lecteur désireux d'approfondir ce sujet aux Réfs [36, 64, 121].

2.2.1 Transformation en ondelettes continue 2D

La première généralisation de la transformation en ondelettes aux fonctions à deux variables réelles a été introduite par Murenzi [61, 62]. Celui-ci propose simplement de remplacer le groupe des transformations affines $ax + b$ par le groupe Euclidien 2D associé aux dilatations, c'est-à-dire le groupe G des similitudes de \mathbb{R}^2 . Ce groupe est non unimodulaire et localement compact. Sa représentation unitaire la plus naturelle dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^2, d^2\mathbf{x})$ des fonctions de carré sommable (énergie finie), est notée $\Omega(\mathbf{b}, \theta, a)$:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{b}, \theta, a}(\mathbf{x}) &= \Omega(\mathbf{b}, \theta, a)\psi(\mathbf{x}), \\ &= a^{-1}\psi(a^{-1}r_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{b})),\end{aligned}\tag{2.1}$$

où \mathbf{b} , θ et a sont respectivement le vecteur de translation, l'angle de rotation et le paramètre de dilatation, et où l'opérateur de rotation r_{θ} agit sur $\mathbf{x} = (x, y)$ suivant l'équation :

$$r_{\theta}(\mathbf{x}) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.\tag{2.2}$$

Murenzi [61, 62] a montré que cette représentation est irréductible et de carré sommable.

Désormais une image sera associée à une fonction f de $L^2(\mathbb{R}^2, d^2\mathbf{x})$. La *transformée en ondelettes continue* $T_{\psi}(\mathbf{b}, \theta, a)$ d'une image avec l'ondelette analysatrice ψ , est définie, à

une normalisation près, comme le produit scalaire de f avec l'ondelette $\psi_{\mathbf{b},\theta,a}$:

$$\begin{aligned} T_\psi(\mathbf{b}, \theta, a) &= C_\psi^{-1/2} \langle \psi_{\mathbf{b},\theta,a} | f \rangle, \\ &= C_\psi^{-1/2} a^{-1} \int d^2\mathbf{x} \psi^*(a^{-1}r_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{b})) f(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

où C_ψ est une constante de normalisation positive, et où l'astérisque représente le complexe conjugué. Dans l'espace de Fourier, l'équation (2.3) devient

$$T_\psi(\mathbf{b}, \theta, a) = C_\psi^{-1/2} a \int d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{b}} \hat{\psi}^*(ar_{-\theta}\mathbf{k}) \hat{f}(\mathbf{k}), \quad (2.4)$$

où la transformée de Fourier de la fonction f est définie par

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

où $\mathbf{k}\mathbf{x} = k_x x + k_y y$ représente le produit scalaire Euclidien. Pour que la transformation en ondelettes soit inversible, l'ondelette ψ doit vérifier la condition d'admissibilité

$$C_\psi = \int d^2\mathbf{k} |\mathbf{k}|^{-2} |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 < \infty, \quad (2.6)$$

où $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Si ψ est suffisamment régulière, cette condition d'admissibilité revient à imposer à l'ondelette d'avoir une moyenne nulle :

$$\hat{\psi}(0) = 0 \Leftrightarrow \int d^2\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.7)$$

La formule de reconstruction s'écrit :

$$f(\mathbf{x}) = C_\psi^{-1/2} \iiint a^{-3} d^2\mathbf{b} d\theta da T_\psi(\mathbf{b}, \theta, a) \psi_{\mathbf{b},\theta,a}(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

À partir des équations (2.6) et (2.8), on peut se convaincre facilement que la transformation en ondelettes 2D conserve l'énergie :

$$\int d^2\mathbf{x} |f(\mathbf{x})|^2 = \iiint a^{-3} d^2\mathbf{b} d\theta da |T_\psi(\mathbf{b}, \theta, a)|^2. \quad (2.9)$$

Remarque

En réalité, l'information que fournit la transformée en ondelettes est très redondante. Cela est du à l'existence du *noyau reproduisant* qui correspond à la transformée de l'ondelette ψ par elle même :

$$K(\mathbf{b}', \theta', a' | \mathbf{b}, \theta, a) = C_\psi^{-1} \langle \psi_{\mathbf{b}',\theta',a'} | \psi_{\mathbf{b},\theta,a} \rangle. \quad (2.10)$$

Ce noyau permet de définir un coefficient en ondelettes donné comme une somme pondérée et continue des autres coefficients :

$$T_\psi(\mathbf{b}', \theta', a') = \iiint a^{-3} d^2\mathbf{b} d\theta da K(\mathbf{b}', \theta', a' | \mathbf{b}, \theta, a) T_\psi(\mathbf{b}, \theta, a). \quad (2.11)$$

Autrement dit, le noyau reproduisant permet de quantifier les corrélations qui existent entre les coefficients de la transformée en ondelettes continue.

2.2.2 Quelques exemples d'ondelettes analysatrices

En 2D, le choix de l'ondelette analysatrice ψ est encore plus stratégique qu'en 1D [22–37]. Suivant l'étude que l'on désire mener, il est évident que telle ondelette sera plus adaptée que telle autre. Dans certaines situations très particulières, il peut même être nécessaire de définir spécialement une ondelette dont les caractéristiques spécifiques permettront d'optimiser l'analyse [64, 90, 91, 117, 118, 122, 123]. Cette sous section présente les ondelettes analysatrices 2D les plus couramment utilisées.

Le chapeau mexicain 2D [61–64]. Dans sa forme la plus générale, le chapeau mexicain s'écrit dans l'espace direct

$$\psi_A(\mathbf{x}) = [2 - (\mathbf{x}A\mathbf{x})]e^{-\mathbf{x}A\mathbf{x}/2}, \quad (2.12)$$

ou dans l'espace de Fourier

$$\hat{\psi}_A(\mathbf{k}) = \sqrt{2\pi}|\det B|^{1/2}(\mathbf{k}B\mathbf{k})e^{-\mathbf{k}B\mathbf{k}/2}, \quad (2.13)$$

où A est une matrice 2×2 positive et $B = A^{-1}$. Le chapeau mexicain est une ondelette réelle qui est invariante par rotation lorsque $A = \lambda I$. Pour obtenir une ondelette anisotrope, on utilise la matrice diagonale $A = \text{diag}(1/\epsilon, 1)$, avec $\epsilon \geq 1$. La sélectivité de cette ondelette est excellente suivant les variables d'espace, mais est de très mauvaise qualité suivant les variables d'échelle et de direction (et ce même lorsque la valeur de ϵ est grande) [64]. Son domaine de prédilection est donc l'analyse ponctuelle, comme la recherche de singularités [63], la détection de contour [63, 124], l'analyse fractale [63], ou le contraste visuel [64, 125].

L'ondelette optique [117, 118]. Les techniques de diffraction optique permettent très facilement de mettre en œuvre un filtre passe-bande expérimental. La forme la plus simple d'un filtrage dans l'espace de Fourier est une approximation binaire de la TF du chapeau mexicain isotrope :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\mathbf{k}) &= 1, \text{ si } k_1 \leq |\mathbf{k}| \leq k_2, \\ &= 0, \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

La transformation en ondelettes optique est un outil expérimental qui combine l'optique et la robotique. Elle est obtenue en utilisant successivement des versions dilatées de ce filtre annulaire. Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [118], où la transformation en ondelettes optique s'est avérée être un très bon outil expérimental pour mettre en évidence et caractériser des géométries multifractales.

L'ondelette de Morlet 2D [61, 62, 64, 125]. Cette ondelette est le type même de l'ondelette orientée, qui possède une direction privilégiée :

$$\psi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{x}} e^{-\mathbf{x}A\mathbf{x}/2} - e^{-\mathbf{k}_0B\mathbf{k}_0/2} e^{-\mathbf{x}A\mathbf{x}/2}. \quad (2.15)$$

Sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}) = \sqrt{2\pi} |\det B|^{1/2} [e^{-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)B(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)/2} - e^{-\mathbf{k}_0B\mathbf{k}_0/2} e^{-\mathbf{k}B\mathbf{k}/2}], \quad (2.16)$$

où A est une matrice 2×2 positive et $B = A^{-1}$. L'ondelette de Morlet est complexe. Les termes correctifs dans ψ et $\hat{\psi}$ garantissent que $\hat{\psi}(0) = 0$, afin que la condition d'admissibilité (2.7) soit satisfaite. En pratique on choisit \mathbf{k}_0 de telle sorte que ces termes soient négligeables. Si on laisse ces termes correctifs de côté, le module de ψ est Gaussien et sa phase est constante dans la direction perpendiculaire à \mathbf{k}_0 . L'ondelette de Morlet est connue pour sa très bonne sélectivité angulaire tout en gardant une sélectivité raisonnable suivant les variables d'espace et d'échelle [64, 121, 125]. Elle est principalement utilisée pour analyser des images qui possèdent des caractéristiques directionnelles (détection de contours, textures orientées).

Autres ondelettes 2D. Il existe encore de nombreuses variantes d'ondelettes 2D dans la littérature, chacune ayant son domaine d'application privilégié [64, 121]. Mentionnons les ondelettes cylindriques Halo et Arc, qui permettent de détecter n'importe quel vecteur d'ondes \mathbf{k}_0 indépendamment de sa direction [126]. Une ondelette directionnelle peut ensuite être utilisée afin de repérer d'éventuelles directions privilégiées. Signalons aussi les ondelettes multidirectionnelles obtenues par superposition de n versions bien choisies de ψ . Elles sont particulièrement adaptées pour détecter (localement ou globalement) la présence d'une symétrie d'ordre n dans l'image analysée [64, 121]. À ce sujet nous renvoyons le lecteur au travail de Arrault et de ses collaborateurs [122, 123], où ces ondelettes multidirectionnelles ont été utilisées pour l'analyse statistique des angles de branchement d'agrégats fractals numériques et expérimentaux.

2.2.3 Ondelettes analysatrices pour la détection multiéchelle de contours

La reconnaissance de formes s'intéresse principalement aux contours qui surlignent les structures d'une image. Afin d'extraire cette information, les algorithmes de détection de contours utilisés en vision par ordinateur [127, 128] s'appliquent à chercher les points où le gradient de l'intensité de l'image – qui est un vecteur – possède un module qui est maximum dans sa direction. Comme l'ont remarqué Mallat et ses collaborateurs [90, 91], la détection de contour introduite par Canny [119] peut être vue comme une transformée en ondelettes 2D avec une ondelette analysatrice spécifique. L'idée est de lisser l'image en la convoluant avec un filtre puis d'extraire le gradient de cette image adoucie.

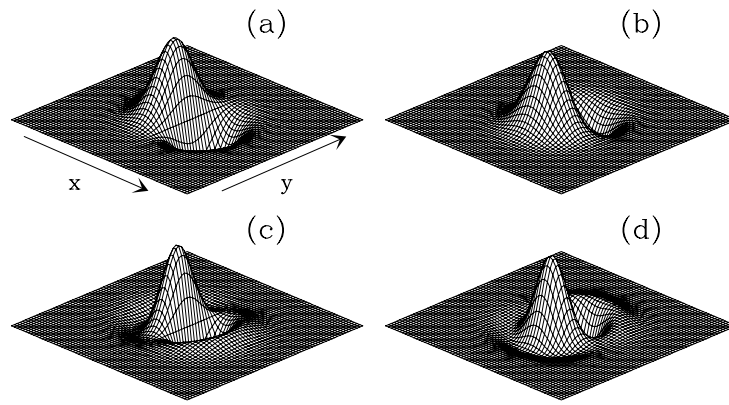


Fig. 2.1 – Les ondelettes analysatrices ψ_1 et ψ_2 définies par l'équation (2.17). Ondelettes analysatrices d'ordre $n_\psi = 1$ obtenues à partir de la Gaussienne (Éq. (2.18)) : (a) ψ_1 ; (b) ψ_2 . Ondelettes analysatrices d'ordre $n_\psi = 1$ obtenues à partir du chapeau mexicain (Éq. (2.19)) : (c) ψ_1 ; (d) ψ_2 .

Soit la fonction lissante 2D $\phi(x, y)$. Nous définissons les deux ondelette ψ_1 et ψ_2 comme étant les dérivées partielles suivant x et suivant y de ϕ :

$$\psi_1(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \psi_2(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}. \quad (2.17)$$

Nous considérerons que ϕ est une fonction localisée autour de $x = y = 0$ et qu'elle ne dépend que de $|\mathbf{x}|$ (ϕ est isotrope). Les deux principales fonctions lissantes utilisées dans ce travail sont la Gaussienne :

$$\phi(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2} = e^{-|\mathbf{x}|^2/2}, \quad (2.18)$$

et le chapeau mexicain (Éq. (2.12)) :

$$\phi(\mathbf{x}) = (2 - \mathbf{x}^2)e^{-|\mathbf{x}|^2/2}. \quad (2.19)$$

Dans la figure 2.1 nous avons représenté les ondelettes analysatrices ψ_1 et ψ_2 pour chacune de ces fonctions lissantes. Le nombre n_ψ de leurs moments nuls dépend de la fonction lissante ϕ utilisée : un seul moment nul lorsque ϕ est la Gaussienne (Éq. (2.18)), trois lorsque ϕ est le chapeau mexicain (Éq. (2.19)). On définit le vecteur ondelette analysatrice par $\boldsymbol{\psi}(x, y) = (\psi_1(x, y), \psi_2(x, y))$.

Soit une fonction $f(x, y)$ de $L^2(\mathbb{R})$, la transformée en ondelettes de f avec l'ondelette analysatrice $\boldsymbol{\psi}$ est définie par le vecteur :

$$\mathbf{T}_\boldsymbol{\psi}[f](\mathbf{b}, a) = \begin{pmatrix} T_{\psi_1}[f] = a^{-2} \int d^2\mathbf{x} \psi_1(a^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})) f(\mathbf{x}) \\ T_{\psi_2}[f] = a^{-2} \int d^2\mathbf{x} \psi_2(a^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})) f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Une intégration par partie donne l'équation :

$$\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{b}, a) = a^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial b_x} \left[\int d^2\mathbf{x} \phi(a^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})) f(\mathbf{x}) \right] \right), \quad (2.21)$$

que l'on peut réexprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{b}, a) &= a^{-2} \nabla \left\{ \int d^2\mathbf{x} \phi(a^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})) f(\mathbf{x}) \right\}, \\ &= \nabla \{ T_\phi[f](\mathbf{b}, a) \}, \\ &= \nabla \{ \phi_{\mathbf{b}, a} \star f \}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cette formule nous permet de présenter la transformée en ondelettes 2D sous un autre angle. Le champ de vecteurs $\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$ est le gradient du champ $T_\phi[f](\mathbf{b}, a)$ obtenu par lissage de f avec la fonction lissante ϕ dilatée d'un facteur a . De plus, si ϕ possède au moins un moment nul, ce lissage ($T_\phi[f](\mathbf{b}, a)$) correspond à la définition de la transformée en ondelettes 2D de f par l'ondelette ϕ comme l'a proposé Murenzi[†] (Éq. (2.3)) [61,62].

Remarque

Dans l'équation (2.1) la normalisation en a^{-1} est nécessaire afin que le groupe G soit unitaire. Dans le cadre de l'analyse des singularités d'une image, il est préférable de conserver la norme L^1 plutôt que la norme L^2 (voir Réfs [120,129]). Ce choix se caractérise par la normalisation en a^{-2} dans les équations (2.20), (2.21) et (2.22) ainsi que dans l'expression de T_ϕ :

$$T_\phi[f](\mathbf{b}, a) = a^{-2} \int d^2\mathbf{x} \phi(a^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})) f(\mathbf{x}). \quad (2.23)$$

Le lecteur perspicace aura remarqué l'absence de la constante C_ψ (Éq. (2.6)) dans les formules précédentes. En effet, comme la propriété de réversibilité n'est pas nécessaire pour notre analyse, nous avons choisi de simplifier les notations en fixant C_ψ à 1.

Dans la suite, nous allons étudier les propriétés du champ de gradient $\mathbf{T}_\psi[f]$ qui définit la transformée en ondelettes 2D d'après l'équation (2.22). Le vecteur $\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$ nous renseigne sur les variations de l'image au point \mathbf{b} et à l'échelle a . Sa direction est la direction de plus grande variation, et son module en caractérise l'amplitude. Ce sont ces deux grandeurs que nous allons manipuler tout au long de ce travail. Nous utiliserons principalement la représentation polaire (module, argument) définie comme suit :

$$\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{b}, a) = (\mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{b}, a), \mathcal{A}_\psi[f](\mathbf{b}, a)), \quad (2.24)$$

[†]Notons que le paramètre θ de l'équation (2.3) n'apparaît pas dans l'expression de $T_\phi[f](\mathbf{b}, a)$. Si ψ est une ondelette analysatrice isotrope on a l'égalité pour toute valeur de θ . Si ψ est anisotrope, $T_\phi[f](\mathbf{b}, a)$ peut être reliée à l'équation (2.3) uniquement pour $\theta = 0$.

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{b}, a) &= |\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{b}, a)|, \\ &= \left[(T_{\psi_1}[f](\mathbf{b}, a))^2 + (T_{\psi_2}[f](\mathbf{b}, a))^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

et

$$\mathcal{A}_\psi[f](\mathbf{b}, a) = \text{Arg}(T_{\psi_1}[f](\mathbf{b}, a) + iT_{\psi_2}[f](\mathbf{b}, a)). \quad (2.26)$$

2.3 Caractérisation de la régularité locale d'une surface rugueuse par les maxima du module de la transformée en ondelettes

Nous appelons *surface rugueuse*, toute surface irrégulière qui ne possède aucune zone de repliement, c'est-à-dire que l'on peut entièrement définir la surface par une fonction f , telle que $z = f(x, y)$, où z représente la hauteur de la surface au point $\mathbf{x} = (x, y)$. En particulier, nous nous intéresserons aux surfaces rugueuses représentant des fonctions fractales autoaffines de \mathbb{R}^2 [2, 3, 6, 7, 9, 72–74]. Une surface autoaffine est une surface qui est invariante lorsqu'on lui applique les transformations affines :

$$dx \rightarrow \lambda_x dx, \quad dy \rightarrow \lambda_y dy, \quad dz \rightarrow \lambda_z dz, \quad (2.27)$$

où dx et dy sont les distances horizontales, et où dz est la distance verticale. Cela indique que, lorsqu'on applique une dilatation isotrope suivant x et y , il existe une dilatation suivant la hauteur z qui permet de retrouver l'objet initial. Pour le cas des surfaces déterministes l'objet dilaté est exactement le même que l'original, alors que pour les surfaces aléatoires ils sont semblables statistiquement. Afin de pouvoir composer des transformations affines (Éq. (2.27)), nous avons besoin d'une structure de groupe [79, 130–133]. L'une des conséquences est que, par exemple, λ_y et λ_z doivent être des fonctions homogènes de λ_x :

$$\lambda_y = \lambda_x^\alpha, \quad \lambda_z = \lambda_x^H. \quad (2.28)$$

L'isotropie dans le plan (x, y) est obtenue lorsque $\alpha = 1$. Dans ce cas l'exposant H , appelé *exposant de rugosité*, ou *exposant de Hurst* [2, 3, 6, 7, 9, 72–74], suffit à lui seul à caractériser la rugosité globale de la surface. Dans les autres cas, α est un exposant qui caractérise les propriétés d'invariance par dilatation anisotrope de la surface rugueuse dans le plan (x, y) [79, 130].

2.3.1 Régularité globale et locale des fonctions fractales

Une fonction fractale autoaffine représentant une surface rugueuse, vérifie la propriété suivante : quel que soit le point $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ de \mathbb{R}^2 , quel que soit le point $\mathbf{x} = (x, y)$

dans un voisinage de \mathbf{x}_0 , il existe un exposant $H \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\lambda > 0$, on ait la relation [2, 3, 6, 7, 9, 72–74] :

$$f(x_0 + \lambda x, y_0 + \lambda^\alpha y) - f(x_0, y_0) \simeq \lambda^H [f(x_0 + x, y_0 + y) - f(x_0, y_0)], \quad (2.29)$$

Le symbole \simeq signifie que l'on a égalité dans le cas où la fonction f est déterministe et seulement égalité en loi lorsque f représente la réalisation d'un processus aléatoire. Si $\alpha = 1$, la fonction possède des propriétés d'invariance d'échelle isotropes par rapport aux variables d'espace x et y ; ces propriétés sont anisotropes pour toute autre valeur de α . Remarquons que si H et α prennent la valeur 1 alors la surface rugueuse est *autosimilaire*, c'est-à-dire qu'elle est invariante par des dilatations isotropes [2, 3, 79, 131–133]. Si $H < 1$, la fonction f n'est pas dérivable, et plus H est petit plus f est singulière.

De nombreuses méthodes permettant d'estimer l'exposant de Hurst d'une surface autoaffine, ont été utilisées dans la littérature [2, 3, 5–20]. Dans la plupart des cas, il est implicitement supposé que la surface étudiée présente des propriétés d'invariance d'échelle isotropes, car les méthodes employées sont identiques à celles élaborées pour l'analyse des signaux 1D, à savoir les méthodes de la variance et du spectre de puissance, les fonctions de corrélations, la méthode DFA (de l'anglais *detrended fluctuations analysis*) et les distributions de probabilité de premier et de multiretour [76–79, 82–85]. L'adaptation de ces méthodes pour l'étude des surfaces rugueuses se réduit à analyser des profils 1D obtenus par des coupes de la surface considérée. Cette stratégie ne pose aucun problème, tant que l'estimation de l'exposant de Hurst H est indépendante de la coupe. Lorsque cette estimation varie suivant l'orientation du plan de coupe, on peut se questionner sur la validité de l'hypothèse d'invariance d'échelle isotrope et il n'est plus raisonnable d'utiliser ces méthodes 1D : il devient alors impératif d'utiliser des méthodes spécifiques à l'analyse des surfaces rugueuses. Malheureusement, à notre connaissance, la plupart des généralisations de ces méthodes aux fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} ne sont opérationnelles que dans le cadre où l'hypothèse d'invariance d'échelle isotrope s'applique. Celles que nous présentons ici font partie des méthodes les plus utilisées [6–14].

- **La méthode de la variance** [6–14]. La variance des fluctuations de hauteur est une mesure quantitative de l'épaisseur d'une surface rugueuse :

$$W^2(l) = \langle f^2(\mathbf{x}) \rangle_l - \langle f(\mathbf{x}) \rangle_l^2, \quad (2.30)$$

où $\langle \dots \rangle_l$ désigne la moyenne d'ensemble et d'espace sur un domaine de taille caractéristique l . En pratique, on moyenne les résultats obtenus lorsque l'on déplace la fenêtre d'observation de taille l le long de la surface. Lorsque l est petit, l'épaisseur $W(l)$ se comporte comme

$$W(l) \sim l^H, \quad (2.31)$$

où H est l'exposant de Hurst.

- **Les fonctions de corrélation** [6–14]. *A priori* les fonctions de corrélation suivent la même loi d'échelle que l'épaisseur :

$$C(l) = \left[\langle (f(\mathbf{x}+1) - f(\mathbf{x}))^2 \rangle \right]^{1/2} \sim l^H, \quad (2.32)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne spatiale (sur \mathbf{x}), la moyenne sur la direction du vecteur incrément \mathbf{l} , ainsi que la moyenne d'ensemble.

- **La méthode spectrale** [6–14]. Cette méthode s'inspire des méthodes expérimentales d'estimation de l'exposant de Hurst H , basées sur les techniques de diffraction (rayons X, électrons, lumière). On peut obtenir H à partir du comportement en loi de puissance du spectre de puissance en fonction du vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k, \theta)$:

$$S(k) = \frac{1}{2\pi} \int d\theta |\hat{f}(k, \theta)|^2 \sim k^{-\beta}, \quad \text{avec } \beta = 2H + 2. \quad (2.33)$$

L'utilisation de ces méthodes pour estimer l'exposant de Hurst peut conduire à des résultats différents [79]. Au delà des problèmes d'isotropie (qui doit être vérifiée avant toute estimation), ces méthodes présentent des biais dans l'estimation de H pouvant résulter de la présence de comportements réguliers qui perturbent sensiblement l'évolution dans les échelles des quantités estimées (variance, fonctions de corrélation, spectre de puissance). De plus ces méthodes souffrent d'une insuffisance d'ordre plus fondamental : elle ne permettent pas de caractériser des fonctions fractales dont la régularité fluctue d'un point à un autre, et sont donc limitées à l'étude des fonctions fractales homogènes autoaffines.

Les fonctions fractales présentent généralement des fluctuations locales de leur rugosité (ou de leur régularité) [46–50, 86, 88, 89]. Afin de pouvoir caractériser pleinement ces propriétés *multiaffines*, il est nécessaire d'introduire une version locale $h(\mathbf{x}_0)$ de l'exposant de Hurst, permettant ainsi d'accéder à la rugosité en un point \mathbf{x}_0 donné. L'*exposant de Hölder*, qui représente la force de la singularité de f au point \mathbf{x}_0 , fournit une définition rigoureuse de $h(\mathbf{x}_0)$. Cet exposant est la plus grande valeur $h(\mathbf{x}_0)$ telle qu'il existe un polynôme homogène de degré $n < h(\mathbf{x}_0)$ et une constante $C > 0$ pour lesquels, quel que soit \mathbf{x} dans un voisinage de \mathbf{x}_0 , on ait [90, 91, 122] :

$$|f(\mathbf{x}) - P_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \leq C |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{h(\mathbf{x}_0)}. \quad (2.34)$$

On peut facilement montrer que si $h(\mathbf{x}_0) \in]n, n + 1[$ alors f est dérivable n fois au point \mathbf{x}_0 , mais pas $n + 1$ fois. Ainsi $h(\mathbf{x}_0)$ quantifie l'irrégularité de la fonction f au point \mathbf{x}_0 : plus sa valeur est petite, plus la fonction f est singulière au point \mathbf{x}_0 .

Dans le cas des fonctions fractales qui ne possèdent que des *singularités algébriques* (*cusps*, en anglais), l'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0)$ caractérise complètement le comportement de f autour de \mathbf{x}_0 . Pour les fonctions qui présentent des *singularités oscillantes* (*chirps*, en anglais), il est nécessaire d'introduire un deuxième exposant $\beta(\mathbf{x}_0)$, qui caractérise la divergence de la fréquence locale autour de \mathbf{x}_0 . Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement aux singularités algébriques des fonctions de deux variables réelles. Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [134] où sont présentés des résultats mathématiques rigoureux sur les singularités oscillantes. L'étude des singularités algébriques à 2D est un peu plus délicate qu'à 1D, car l'invariance dans les échelles peut être relative à des dilatations isotropes, comme anisotropes [2, 3, 79, 131–133, 135].

- **Dilatations isotropes.** Être invariant d'échelle par une dilatation isotrope implique que la fonction f a le comportement local suivant autour du point \mathbf{x}_0 :

$$f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) \simeq \lambda^{h(\mathbf{x}_0)} (f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)), \quad (2.35)$$

où \mathbf{u} est un vecteur unitaire et $\lambda > 0$. Si l'exposant $h(\mathbf{x}_0)$ ne dépend pas de la direction de \mathbf{u} , alors f présente des propriétés d'invariance d'échelle locale isotropes autour de \mathbf{x}_0 et la singularité correspondante possède un exposant de Hölder égal à $h(\mathbf{x}_0)$. Dans le cas contraire, l'exposant de Hölder est la plus petite valeur de h obtenue après examen de toutes les directions du vecteur \mathbf{u} . f possède alors des propriétés d'invariance d'échelle anisotropes autour de \mathbf{x}_0 avec une, plusieurs, voire un continuum de directions privilégiées selon lesquelles la variation de la fonction définit l'exposant de Hölder au point \mathbf{x}_0 .

- **Dilatations anisotropes.** Être invariant d'échelle suivant une dilatation anisotrope implique que la fonction f a le comportement local suivant autour du point \mathbf{x}_0 [130–133, 135] :

$$f(\mathbf{x}_0 + \Lambda_\alpha(\lambda)r_\theta\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) \simeq \lambda^{h(\mathbf{x}_0)}(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)), \quad (2.36)$$

où \mathbf{u} est un vecteur unitaire et $\lambda > 0$. r_θ est une matrice de rotation, et $\Lambda_\alpha(\lambda)$ est une matrice 2×2 diagonale qui représente la transformation autoaffine anisotrope dans le référentiel centré en \mathbf{x}_0 , et d'orientation donnée par l'angle θ :

$$\Lambda_\alpha(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^\alpha \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

La fonction f présente des propriétés d'invariance d'échelle locale anisotrope autour de \mathbf{x}_0 , et la singularité correspondante possède un exposant de Hölder qui est donné par le comportement de f dans la direction θ (si $\alpha < 1$) ou $\theta + \pi/2$ (si $\alpha > 1$).

Remarque

Notons que le gain d'un degré de liberté dans le passage de 1D à 2D permet d'envisager des effets rotationnels différentiels dans l'opération de dilatation. Ce sujet a été traité par Lovejoy et Schertzer [132] dans le cadre de l'invariance d'échelle généralisée (GSI, de l'anglais *Generalized Scale Invariance*). Précisons, de plus, qu'une singularité algébrique (*cusp*) en forme de spirale 2D en un point \mathbf{x}_0 correspond à une invariance d'échelle discrète suivant n'importe quelle coupe de la surface rugueuse considérée passant par \mathbf{x}_0 .

2.3.2 Analyse en ondelettes 2D de la régularité locale d'une image

Nous allons illustrer, sur un exemple simple, la capacité de la transformation en ondelettes 2D, présentée dans la section 2.2.3, à caractériser la régularité locale d'une image [120,122]. Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} possédant une singularité isotrope isolée positionnée au point \mathbf{x}_0 et d'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0) \in]n, n + 1[$:

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq p \leq n} \frac{1}{p!} \left[(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{[p]} (x_0, y_0) + C [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{h(\mathbf{x}_0)/2}, \quad (2.38)$$

où

$$\left[(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{[p]} (x_0, y_0) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = p} A_{\alpha_1, \alpha_2} (x - x_0)^{\alpha_1} (y - y_0)^{\alpha_2} \frac{\partial^p f}{\partial^{\alpha_1} x \partial^{\alpha_2} y} (x_0, y_0). \quad (2.39)$$

Comme l'indique l'équation (2.38), la dérivée d'ordre n de f est singulière. D'après sa définition (Éq. (2.20)), la transformée en ondelettes 2D s'écrit :

$$\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{x}_0, a) = \left(\int d^2 \mathbf{x} \psi_1(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_0 + a\mathbf{x}) \right) \left(\int d^2 \mathbf{x} \psi_2(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_0 + a\mathbf{x}) \right). \quad (2.40)$$

Ainsi en remplaçant f par son expression (2.38), on obtient pour la première composante de la transformée en ondelettes :

$$T_{\psi_1}[f](\mathbf{x}_0, a) = \sum_{0 \leq p \leq n} \frac{1}{p!} \int d^2 \mathbf{x} \psi_1(\mathbf{x}) \left[ax \frac{\partial f}{\partial x} + ay \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{[p]} (x_0, y_0) + a^{h(\mathbf{x}_0)} C \int d^2 \mathbf{x} \psi_1(\mathbf{x}) [x^2 + y^2]^{h(\mathbf{x}_0)/2}. \quad (2.41)$$

En développant l'un des termes de la somme discrète, on obtient :

$$\int d^2 \mathbf{x} \psi_1(\mathbf{x}) \left[ax \frac{\partial f}{\partial x} + ay \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{[p]} (x_0, y_0) = a^p \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = p} A_{\alpha_1, \alpha_2} M_{\alpha_1, \alpha_2}[\psi_1] \frac{\partial^p f}{\partial^{\alpha_1} x \partial^{\alpha_2} y} (x_0, y_0), \quad (2.42)$$

avec

$$M_{\alpha_1, \alpha_2}[\psi_1] = \iint dx dy x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \psi_1(x, y). \quad (2.43)$$

Si l'on utilise des ondelettes analysatrices qui, comme celles représentées dans la figure 2.1, sont séparables, alors la propriété de factorisation $\psi(x, y) = \varrho(x)\vartheta(y)$ permet de réécrire l'équation (2.43) sous la forme :

$$M_{\alpha_1, \alpha_2}[\psi_1] = \int dx x^{\alpha_1} \varrho(x) \int dy y^{\alpha_2} \vartheta(y). \quad (2.44)$$

On dit que l'ondelette analysatrice est d'ordre n_ψ , si la condition suivante est vérifiée :

$$M_{\alpha_1, \alpha_2}[\psi_1] = 0, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, n_\psi - 1]. \quad (2.45)$$

Dans ces conditions il existe deux cas de figures :

- (i) $n_\psi < h(\mathbf{x}_0)$. Le nombre de moments nuls de ψ n'est pas suffisamment grand, et la transformation en ondelettes ne parvient pas à éliminer les termes polynômiaux d'ordre supérieur ou égal à n_ψ . Alors le comportement de $T_{\psi_1}[f]$ dans les échelles est dominé par les composantes régulières dans le membre de droite de l'équation (2.41), qui masquent la contribution de la singularité d'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0)$:

$$T_{\psi_1}[f](\mathbf{x}_0, a) \sim a^{n_\psi}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.46)$$

Autrement dit l'ordre de l'ondelette analysatrice dicte le comportement dans les échelles de la transformée en ondelettes.

- (ii) $n_\psi > h(\mathbf{x}_0)$. Dans ce cas, le premier terme de l'équation (2.41) s'annule, et il est désormais possible d'extraire l'exposant de Hölder du comportement dans les échelles de $T_{\psi_1}[f]$:

$$T_{\psi_1}[f](\mathbf{x}_0, a) \sim a^{h(\mathbf{x}_0)}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.47)$$

Ces résultats étant aussi valables pour $T_{\psi_2}[f]$, on peut prédire le comportement du module de la transformée en ondelettes dans les échelles (Éq. (2.25)) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{x}_0, a) &= \left[(T_{\psi_1}[f](\mathbf{x}_0, a))^2 + (T_{\psi_2}[f](\mathbf{x}_0, a))^2 \right]^{1/2}, \\ &\sim a^{h(\mathbf{x}_0)}, \quad a \rightarrow 0^+, \end{aligned} \quad (2.48)$$

si $n_\psi > h(\mathbf{x}_0)$. On peut ainsi extraire l'exposant $h(\mathbf{x}_0)$, en observant le comportement de $\mathcal{M}_\psi[f]$ en fonction de l'échelle a , dans une représentation logarithmique. Soulignons que si f est infiniment dérivable en \mathbf{x}_0 ($h(\mathbf{x}_0) = +\infty$), alors

$$\mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{x}_0, a) \sim a^{n_\psi}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.49)$$

On peut donc espérer détecter les comportements réguliers de f , en observant l'évolution du comportement de $\mathcal{M}_\psi[f]$ en fonction de l'échelle lorsque l'on augmente l'ordre de l'ondelette analysatrice.

Remarque

Des résultats similaires sont obtenus pour les singularités autoaffines anisotropes. Lorsque $\theta = 0$ dans l'équation (2.36), c'est-à-dire lorsque les opérations de dilatation s'effectuent selon l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, $T_{\psi_1}[f]$ et $T_{\psi_2}[f]$ se comportent avec deux exposants différents, à savoir h et h/α respectivement. Dans ce cas, $\mathcal{M}_\psi[f]$ présente un comportement en loi de puissance dont l'exposant est $\min\{h, h/\alpha\}$. Cet exposant est bien l'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0)$ défini dans l'équation (2.36). Ainsi, le module $\mathcal{M}_\psi[f]$ est bien la quantité à observer pour extraire l'exposant de Hölder en un point donné. La détection d'un comportement autoaffine anisotrope (qui est contenu dans l'exposant $\alpha \neq 1$) passe par l'étude séparée de $T_{\psi_1}[f]$ et de $T_{\psi_2}[f]$, ce qui revient à observer l'évolution dans les échelles de l'argument $\mathcal{A}_\psi[f]$ du vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f]$ conjointement à celui de son module $\mathcal{M}_\psi[f]$.

2.3.3 Détection des singularités par les maxima du module de la transformée en ondelettes

Suivant les arguments présentés dans la section 2.3.2, l'estimation de l'exposant de Hölder d'une fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} peut s'effectuer en regardant le comportement de la transformée en ondelettes continue à l'intérieur d'un cône $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < Ca$ dans le demi-hyperplan espace-échelles [120, 122]. Dans les Réfs [90, 91], Mallat et ses collaborateurs ont démontré qu'une façon efficace de caractériser les singularités d'une image consiste à étudier le comportement des maxima du module de la transformée en ondelettes.

La définition de ces maxima est fortement inspirée de la technique de détection de contours proposée par Canny [119]. Un *maximum du module de la transformée en ondelettes* (MMTO) à l'échelle a est un point \mathbf{b} pour lequel le module $\mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$ (Éq. (2.25)) du vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$ est localement maximum dans la direction $\mathcal{A}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$ (Éq. (2.26)) de ce gradient. Ces maxima sont les points d'inflexion de $f \star \phi_a(\mathbf{x})$. Comme nous allons l'illustrer dans les exemples qui suivent, à une échelle donnée, les maxima du module de la transformée en ondelettes se positionnent sur des lignes (les lignes de contour de Canny), que nous appelons *chaînes de maxima* [120, 122, 129]. Lorsque l'on connecte ces chaînes à travers les échelles, on obtient une ou des surfaces. Cependant, pour l'étude qui nous concerne, il n'est pas nécessaire de garder tous les points d'une chaîne de maxima : en effet, théoriquement seuls les points pour lesquels le module $\mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$ est localement maximum le long d'une chaîne de maxima sont nécessaires pour la caractérisation des singularités de f [90, 91]. Ainsi, à une échelle donnée, nous obtenons un ensemble de points isolés, les *maxima des MMTO* (MMMTO), qui se connectent dans les échelles pour former ce que l'on appelle les *lignes de maxima* [120, 122, 129]. Nous définissons le *squelette de la transformée en ondelettes* en sélectionnant les lignes de maxima qui convergent vers le plan (x, y) dans la limite des petites échelles ($a \rightarrow 0^+$). En chaque point du squelette de la transformée en ondelettes, le vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$ indique que la surface définie par f présente, à l'échelle a et au point \mathbf{b} , une importante variation d'amplitude $\mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$ dans la direction $\mathcal{A}_\psi[f](\mathbf{b}, a)$. Le squelette de la transformée en ondelettes, tel que l'on vient de le définir, contient donc toute l'information nécessaire à l'étude des fluctuations de régularité de la surface étudiée.

Exemple 1. Singularité isotrope en interaction avec une structure localisée douce.

La surface illustrée dans la figure 2.2 est définie par la fonction f_1 :

$$f_1(\mathbf{x}) = Ae^{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2/2\sigma^2} + B|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{0.3}. \quad (2.50)$$

Cette fonction est C^∞ partout, sauf au point $\mathbf{x}_0 = (-256, -256)$ où f_1 possède une singularité isotrope d'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0) = 0.3$. La figure 2.3 représente la transformée en ondelettes (Éq. (2.20)) de la fonction f_1 à l'échelle $a = 2^3\sigma_W$, où $\sigma_W = 13$ est la plus petite échelle accessible à notre microscope mathématique. La fonction lissante ϕ utilisée est la fonction Gaussienne isotrope, l'ordre de l'ondelette analysatrice est donc $n_\psi = 1$ (elle possède un moment nul). Le choix de σ_W et donc du grossissement maximal est fixé

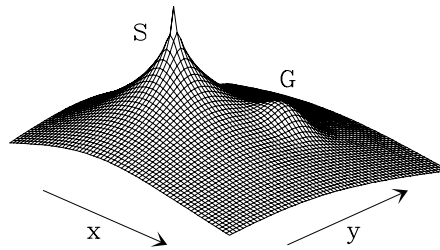


Fig. 2.2 – Représentation 3D de la fonction $f_1(\mathbf{x}) = Ae^{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2/2\sigma^2} + B|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{0.3}$. La singularité isotrope S est positionnée en $\mathbf{x}_0 = (-256, -256)$. La structure Gaussienne G, de largeur $\sigma = 128$, est positionnée en $\mathbf{x}_1 = (256, 256)$. Les valeurs des paramètres sont $A = 1$ et $B = -1$.

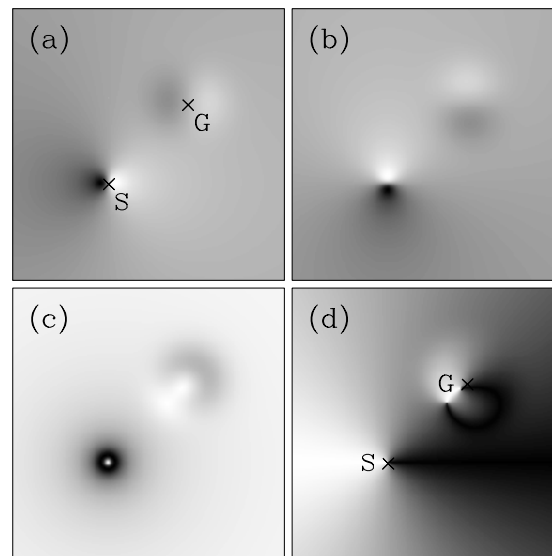


Fig. 2.3 – Transformée en ondelettes de la fonction f_1 représentée dans la figure 2.2 avec une ondelette analysatrice ψ isotrope d'ordre $n_{\psi} = 1$ (ϕ est la fonction Gaussienne isotrope). L'échelle d'analyse est $a = 2^3\sigma_W$ ($\sigma_W = 13$ pixels). (a) $T_{\psi_1}[f_1]$; (b) $T_{\psi_2}[f_1]$ codés du blanc ($\min T_{\psi}$) au noir ($\max T_{\psi}$). (c) $\mathcal{M}_{\psi}[f_1]$ codé du blanc ($\mathcal{M}_{\psi} = 0$) au noir ($\max \mathcal{M}_{\psi}$). (d) $|\mathcal{A}_{\psi}[f_1]|$ codé du blanc ($|\mathcal{A}_{\psi}| = 0$) au noir ($|\mathcal{A}_{\psi}| = \pi$).

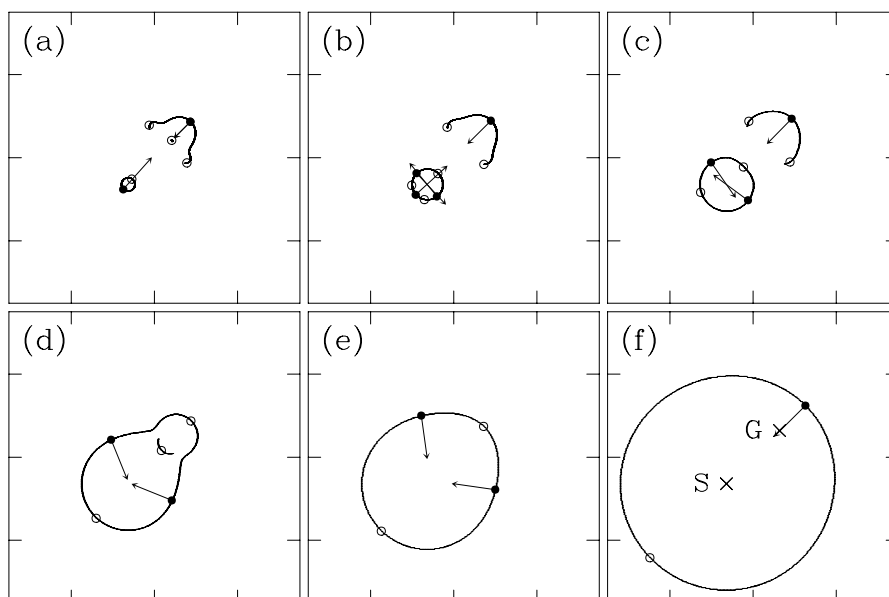


Fig. 2.4 – Chaînes de maxima (trait plein) constituées des MMT0 de la fonction f_1 . Les maxima (respectivement minima) locaux du module \mathcal{M}_ψ le long de ces chaînes, sont représentés par les symboles (\bullet) (respectivement (\circ)). Les flèches représentent le vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f_1]$ associé aux MMT0. Les échelles sont $a = 2^{3.5}\sigma_W$ (a), $2^{4.7}\sigma_W$ (b), $2^{5.5}\sigma_W$ (c), $2^{6.3}\sigma_W$ (d), $2^{6.8}\sigma_W$ (e) et $2^{7.5}\sigma_W$ (f). L'ondelette analysatrice est identique à celle utilisée dans la figure 2.3.

par la contrainte que la forme de l'ondelette analysatrice demeure suffisamment résolue relativement à l'échantillonnage de l'image considérée. Nous renvoyons le lecteur à la section 1.1.3 qui traite de ces problèmes de résolution. Les coordonnées cartésiennes $T_{\psi_1}[f_1]$ et $T_{\psi_2}[f_1]$ du vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f_1]$, sont représentées dans les figures 2.3a et 2.3b respectivement. Les coordonnées polaires $\mathcal{M}_\psi[f_1]$ et $\mathcal{A}_\psi[f_1]$ correspondantes sont représentées dans les figures 2.3c et 2.3d. On constate sur la figure 2.3c que le module présente une symétrie radiale autour de la singularité isotrope S située en \mathbf{x}_0 . Cette symétrie est confirmée dans la figure 2.3d, où l'argument parcourt toute la gamme des angles possibles de 0 à 2π autour de \mathbf{x}_0 . La figure 2.4 représente les chaînes de maxima constituées des MMT0 calculés pour différentes échelles comprises entre $2^{3.5}\sigma_W$ (Fig. 2.4a) et $2^{7.5}\sigma_W$ (Fig. 2.4f). À la plus petite échelle (Fig. 2.4a), on constate qu'il y a principalement deux chaînes de maxima. L'une est fermée et se situe autour de la singularité S , alors que l'autre est ouverte et se place près de la Gaussienne G . Chacune de ces chaînes comporte un MMT0 (\bullet), pour lequel le vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f_1]$ est représenté par une flèche qui pointe sur S ou sur G suivant la chaîne concernée. Intéressons nous au MMT0 qui se situe près de la singularité. Sa position correspond au point de plus grande variation de f_1 autour de S à l'échelle considérée; la valeur du module $\mathcal{M}_\psi[f_1]$ de $\mathbf{T}_\psi[f_1]$ en ce point mesure l'amplitude de cette variation tandis que l'orientation $\mathcal{A}_\psi[f_1]$ de $\mathbf{T}_\psi[f_1]$ en indique la direction. On peut ainsi affirmer que la direction de plus grande variation de f_1 à partir de S à cette

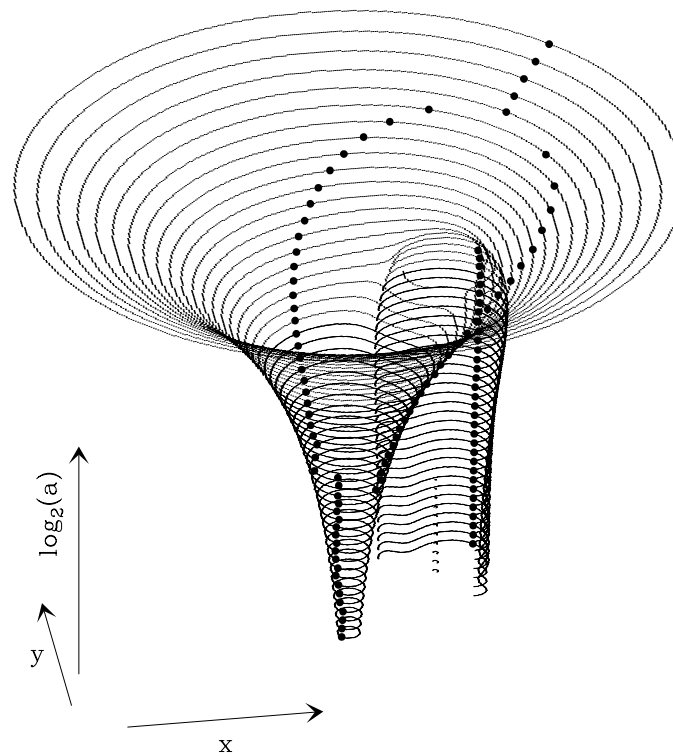


Fig. 2.5 – Représentation 3D de l'évolution topologique des chaînes de maxima (MMTO) de f_1 dans le demi-hyperplan espace-échelles. Les MMMTO (\bullet) se placent sur des courbes que l'on appelle lignes de maxima. Une ligne de maxima est obtenue par chaînage d'un MMMTO calculé à une échelle donnée avec le MMMTO le plus proche de l'échelle supérieure. Il existe deux lignes de maxima, $\mathcal{L}_{x_0}(a)$ et $\mathcal{L}_{x_1}(a)$, qui pointent respectivement sur la singularité S et sur la Gaussienne G à la limite des petites échelles.

échelle est donnée par $\theta_{x_0} = \mathcal{A}_\psi[f_1] + \pi$. Ce raisonnement peut bien évidemment être répété pour le MMMTO de la Gaussienne. Observons maintenant l'évolution de ces chaînes de maxima lorsque l'on augmente l'échelle a . On constate que la taille caractéristique de la chaîne autour de S augmente proportionnellement à l'échelle, pour finalement s'ouvrir et se connecter à la chaîne de la Gaussienne lorsqu'on atteint une échelle qui est caractéristique de la distance entre S et G (Fig. 2.4d). La nouvelle chaîne englobe maintenant la singularité et la Gaussienne dont les contributions commencent à entrer en compétition. La figure 2.5 illustre l'évolution topologique des chaînes de maxima dans le demi-hyperplan espace-échelles. Cette représentation 3D révèle la topologie des lignes de maxima qui sont obtenues par chaînage des MMMTO depuis les petites vers les grandes échelles. On constate que l'une de ces lignes pointe vers la singularité S. La figure 2.6 illustre l'évolution du vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f_1]$ le long de ces lignes de maxima. Le comportement en loi de puissance du module de la transformée en ondelettes le long de la ligne de maxima $\mathcal{L}_{x_0}(a)$ est illustré

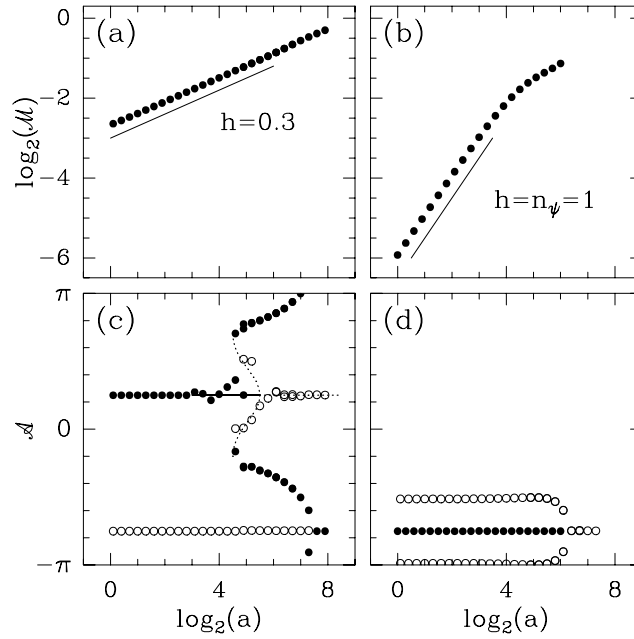


Fig. 2.6 – Évolution de $\mathcal{M}_\psi[f_1]$ et de $\mathcal{A}_\psi[f_1]$ en fonction de l'échelle a , le long des lignes de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ et $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$ qui pointent respectivement sur la singularité S ((a) et (c)) et sur la Gaussienne G ((b) et (d)). Les symboles (\bullet) et (\circ) ont les mêmes significations que dans la figure 2.4. L'ondelette analysatrice est identique à celle utilisée dans la figure 2.3.

dans la figure 2.6a [90,91] :

$$\mathcal{M}_\psi[f_1](\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)) \sim a^{h(\mathbf{x}_0)}, \quad a \rightarrow 0^+, \quad (2.51)$$

où $h(\mathbf{x}_0) = 0.3$ est l'exposant de Hölder associé à la singularité S. La figure 2.6c révèle que le comportement de $\mathcal{A}_\psi[f_1]$ le long de cette ligne de maxima tend vers la valeur :

$$\mathcal{A}_\psi[f_1](\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)) = \pi + \theta_{\mathbf{x}_0}, \quad (2.52)$$

dans la limite $a \rightarrow 0^+$, où $\theta_{\mathbf{x}_0}$ correspond à la direction de plus grande variation de f_1 à partir de S. Ainsi, l'étude de $\mathbf{T}_\psi[f_1]$ le long de la ligne $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ nous a permis de caractériser la singularité S de f_1 localisée en \mathbf{x}_0 , en mesurant sa force (exposant de Hölder) via le comportement du module $\mathcal{M}_\psi[f_1]$, et en détectant la direction privilégiée, induite par l'axe de symétrie S-G, via le comportement de l'argument $\mathcal{A}_\psi[f_1]$. Notons que la seconde ligne de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$ pointe vers la Gaussienne G, dont la nature régulière est identifiée par le comportement particulier de $\mathcal{M}_\psi[f_1]$ (dans le sens où il dépend de l'ordre de l'ondelette analysatrice utilisée) illustré dans la figure 2.6b :

$$\mathcal{M}_\psi[f_1](\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)) \sim a^{n_\psi}, \quad a \rightarrow 0^+, \quad (2.53)$$

où $n_\psi = 1$ est l'ordre de l'ondelette analysatrice. Remarquons que la ligne $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$ disparaît aux grandes échelles, alors que $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ est toujours présente. Cela indique que la contribution de la singularité S l'emporte sur celle de la Gaussienne G, confirmant ainsi que la

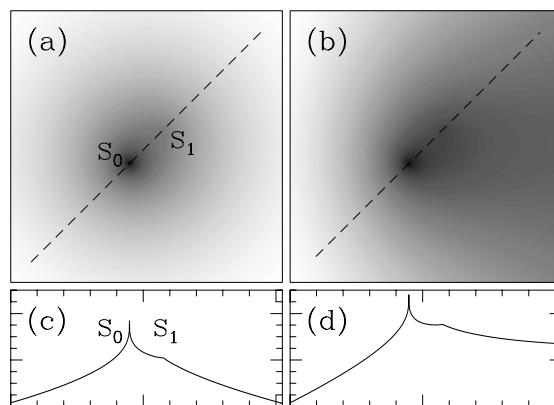


Fig. 2.7 – Images représentant les fonctions (a) f_2 (Éq. (2.54)) et (b) f_3 (Éq. (2.55)) codées du blanc (min f) au noir (max f). (c) et (d) sont les profils obtenus selon la coupe matérialisée par le trait interrompu en (a) et (b) respectivement. Les singularités S_0 et S_1 sont situées en $\mathbf{x}_0 = (-64, -64)$ et $\mathbf{x}_1 = (64, 64)$ respectivement. Les valeurs des paramètres sont $A = -80$ et $B = -1$.

transformée en ondelettes 2D est parfaitement adaptée pour détecter et identifier les singularités isolées d'une fonction. Un retour sur la figure 2.4f montre qu'aux grandes échelles il n'existe qu'une seule chaîne de maxima fermée, circulaire et centrée en S , signe de la domination de la singularité; toutefois la présence de G induit une brisure de la symétrie radiale autour de S .

Remarque

On constate sur la figure 2.5 que la ligne $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ associée à la singularité S présente une sorte de « boucle » sur une gamme d'échelles donnée. Cela est aussi visible sur le comportement de $\mathcal{A}_\psi[f_1]$ dans la figure 2.6c. Cette gamme d'échelles correspond aux échelles où les contributions de S et de G rentrent en compétition. Ainsi, à une certaine échelle a^* , $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ se sépare en deux suivant un phénomène d'hystérésis (Fig. 2.4b), pour se connecter à nouveau à une échelle plus grande (Fig. 2.4f). Cependant, il faut signaler que ce phénomène dépend fortement du jeu de paramètres choisi pour définir f_1 , à savoir la force de la singularité, les préfacteurs A et B ainsi que la distance entre S et G . Le moindre changement peut conduire à une topologie légèrement différente. Précisons que ce dédoublement (sous-critique) n'est pas pris en compte par l'algorithme de construction des lignes de maxima. En effet ces lignes sont obtenues par chaînage des MMMTO d'une échelle à ceux de l'échelle immédiatement supérieure. Ainsi, lorsque l'on arrive à l'échelle de la bifurcation, une seule des deux branches est sélectionnée aux échelles supérieures (la plus proche si la symétrie est brisée), l'autre branche n'étant pas répertoriée dans la définition du squelette de la transformée en ondelettes.

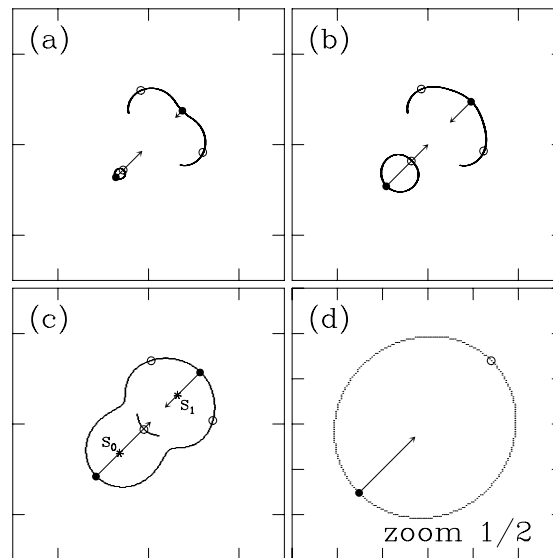


Fig. 2.8 – Chaînes de maxima (trait plein) constituées des MMTO de la fonction f_2 calculées avec une ondelette analysatrice ψ isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ (ϕ est la fonction Gaussienne isotrope). Les maxima (respectivement minima) locaux du module $\mathcal{M}_\psi[f_2]$ le long de ces chaînes, sont représentés par les symboles (\bullet) (respectivement (\circ)). Les flèches représentent le vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f_2]$ aux MMMTO. Les échelles sont $a = 2^1\sigma_W$ (a), $2^{3.8}\sigma_W$ (b), $2^{4.7}\sigma_W$ (c) et $2^{6.9}\sigma_W$ (d).

Exemple 2. Deux singularités isotropes en interaction

La surface illustrée dans la figure 2.7a est définie par la fonction f_2 :

$$f_2(\mathbf{x}) = A|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{0.3} + B|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^{0.8}. \quad (2.54)$$

Cette surface possède deux singularités isotropes. La singularité S_0 , d'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0) = 0.3$, est positionnée en \mathbf{x}_0 , et la singularité S_1 , d'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_1) = 0.8$, est positionnée en \mathbf{x}_1 . La figure 2.8 représente les chaînes de maxima (MMTO) et les MMMTO obtenus à différentes échelles. On constate une ressemblance certaine avec les résultats obtenus pour f_1 , dans le sens où, à petite échelle (Fig.2.8a), une courbe fermée entoure la singularité la plus forte, à savoir S_0 , alors que la chaîne correspondant à la singularité la plus faible, à savoir S_1 , est ouverte. En augmentant le paramètre d'échelle a , ces courbes se connectent (Fig. 2.8c), pour finalement ne former qu'une seule chaîne de maxima fermée et circulaire entourant les deux singularités (Fig. 2.8d). On remarque, de plus, que la ligne de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ associée à la plus forte singularité S_0 existe à toutes les échelles, alors qu'au dessus d'une certaine échelle la ligne $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$ associée à S_1 a disparue. Cela signifie que le microscope transformée en ondelettes ne peut plus distinguer la présence de deux singularités lorsque le grossissement est trop faible. Intéressons nous maintenant au comportement du vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f_2]$ le long de ces deux lignes de maxima. Sur la figure 2.9 nous avons représenté l'évolution du module $\mathcal{M}_\psi[f_2]$ et de l'argument $\mathcal{A}_\psi[f_2]$ en fonction de l'échelle a . On constate que pour les deux lignes de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ et

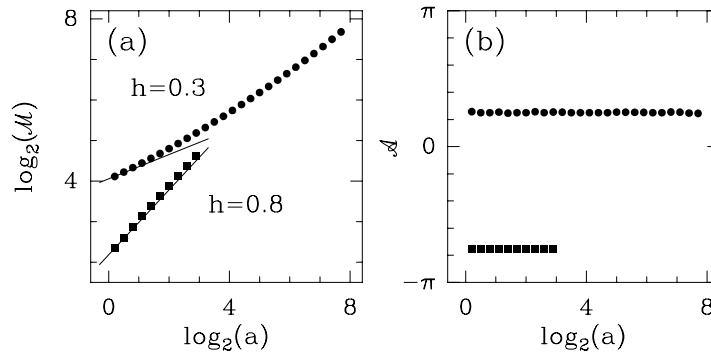


Fig. 2.9 – Évolution de $\mathcal{M}_\psi[f_2]$ (a) et de $\mathcal{A}_\psi[f_2]$ (b) en fonction de l'échelle a , le long des lignes de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ (●) et $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$ (■) qui pointent respectivement sur la plus forte singularité S_0 ($h(\mathbf{x}_0) = 0.3$) et sur la plus faible singularité S_1 ($h(\mathbf{x}_1) = 0.8$). L'ondelette analysatrice est identique à celle utilisée dans la figure 2.8.

$\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$, l'orientation $\mathcal{A}_\psi[f_2]$ de $\mathbf{T}_\psi[f_2]$ demeure quasiment inchangée à travers les échelles (Fig. 2.9b). Remarquons que cette direction n'est rien d'autre que l'axe qui joint les deux singularités S_1 et S_2 et qui est un axe de symétrie de la fonction f_2 . Ainsi, $\theta_{\mathbf{x}_0} = \mathcal{A}_\psi[f_2] - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ (respectivement $\theta_{\mathbf{x}_1} = \mathcal{A}_\psi[f_2] - \pi = \frac{\pi}{4}$) indique la direction de plus grande variation de f_2 à partir de S_0 (respectivement à partir de S_1). À la limite des petites échelles, $\mathcal{M}_\psi[f_2]$ se comporte en loi de puissance le long de $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ (●) (respectivement le long de $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$ (■)) avec un exposant $h(\mathbf{x}_0) = 0.3$ (respectivement $h(\mathbf{x}_1) = 0.8$) en parfait accord avec la valeur théorique de l'exposant de Hölder de la singularité S_0 (respectivement S_1). Notons que, pour les échelles où les contributions des deux singularités entrent en compétition, $\mathcal{M}_\psi[f_2]$ ne présente plus un comportement en loi de puissance bien défini. En fait le comportement observé dépend énormément du rapport des préfacteurs A et B dans la définition de la fonction f_2 (Éq. (2.54)).

Exemple 3. Singularités isotropes superposées à une composante linéaire

La surface illustrée dans la figure 2.7b est une simple superposition de la surface précédente (Fig. 2.7a) avec une rampe linéaire dans la direction x . Elle est définie par la fonction f_3 :

$$f_3(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) + \frac{x}{2}. \quad (2.55)$$

Intéressons nous au comportement du vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f_3]$ le long des lignes de maxima obtenues à partir de la transformée en ondelettes de f_3 calculée avec une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ (ϕ est la fonction Gaussienne isotrope). La première constatation est que désormais il n'existe plus qu'une seule ligne de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$. Cette ligne converge vers la singularité S_0 , c'est-à-dire vers la singularité la plus forte, et le comportement de $\mathbf{T}_\psi[f_3]$ le long de cette ligne est sensiblement affecté par la présence de la composante linéaire. La figure 2.10 représente l'évolution du module $\mathcal{M}_\psi[f_3]$ et de l'argument $\mathcal{A}_\psi[f_3]$ en fonction de l'échelle. Lorsque a diminue, on constate que $\mathcal{M}_\psi[f_3]$ converge

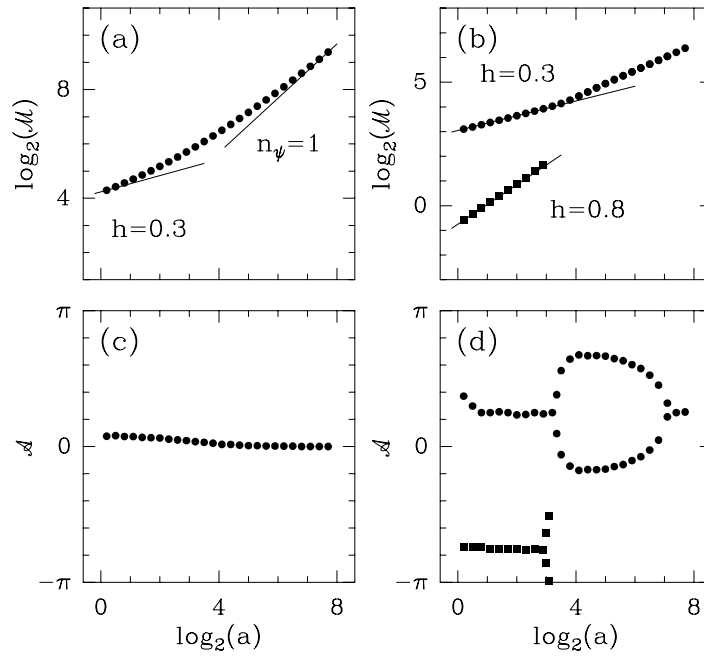


Fig. 2.10 – Évolution de $\mathcal{M}_\psi[f_3]$ et de $\mathcal{A}_\psi[f_3]$ en fonction de l'échelle a , le long des lignes de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ (\bullet) et $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$ (\blacksquare) qui pointent respectivement vers la plus forte singularité S_0 ($h(\mathbf{x}_0) = 0.3$) et vers la plus faible singularité S_1 ($h(\mathbf{x}_1) = 0.8$). (a) et (c) L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ illustrée dans les figures 2.1a et 2.1b (ϕ est la fonction Gaussienne isotrope). (b) et (d) L'ondelette analysatrice est l'ondelette d'ordre $n_\psi = 3$ illustrée dans les figures 2.1c et 2.1d (ϕ est la chapeau mexicain isotrope).

très lentement vers la loi de puissance d'exposant $h(\mathbf{x}_0) = 0.3$ attendue. En fait, à grande échelle, $\mathcal{M}_\psi[f_3]$ transite vers un comportement en loi de puissance d'exposant imposé par l'ordre de l'ondelette analysatrice $n_\psi = 1$. Cette observation est la signature de la présence d'une composante régulière dans la fonction f_3 . L'évolution de l'argument $\mathcal{A}_\psi[f_3]$ confirme l'existence de ces deux régimes. À grande échelle, la direction du gradient indique le sens de la rampe ($\mathcal{A}_\psi[f_3] = 0$), alors qu'à la limite des petites échelles $\mathcal{A}_\psi[f_3]$ tend lentement vers un angle imposé par la disposition des singularités S_0 et S_1 ainsi que par la direction de la rampe. Force est de constater que l'ondelette analysatrice choisie n'est pas adaptée pour cette étude : étant incapable de s'affranchir de la composante linéaire, elle ne peut ni détecter la singularité la plus faible S_1 , ni caractériser convenablement la singularité la plus forte S_0 (du moins pour la gamme d'échelles explorée dans les figures 2.10a et 2.10c).

Il est donc impératif d'utiliser une ondelette analysatrice qui soit orthogonale au comportement linéaire présent dans f_3 . Pour cela, il suffit d'augmenter le nombre de moments nuls de ψ en choisissant le chapeau mexicain (Éq. (2.19)) comme fonction lissante ϕ . Les résultats du calcul des lignes de maxima de la transformée en ondelettes de f_3 avec une telle ondelette d'ordre $n_\psi = 3$, sont présentés dans les figures 2.11, 2.10b et 2.10d. On constate que, même si leur topologie a changé (présence d'une « boucle » dans $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$), on retrouve,

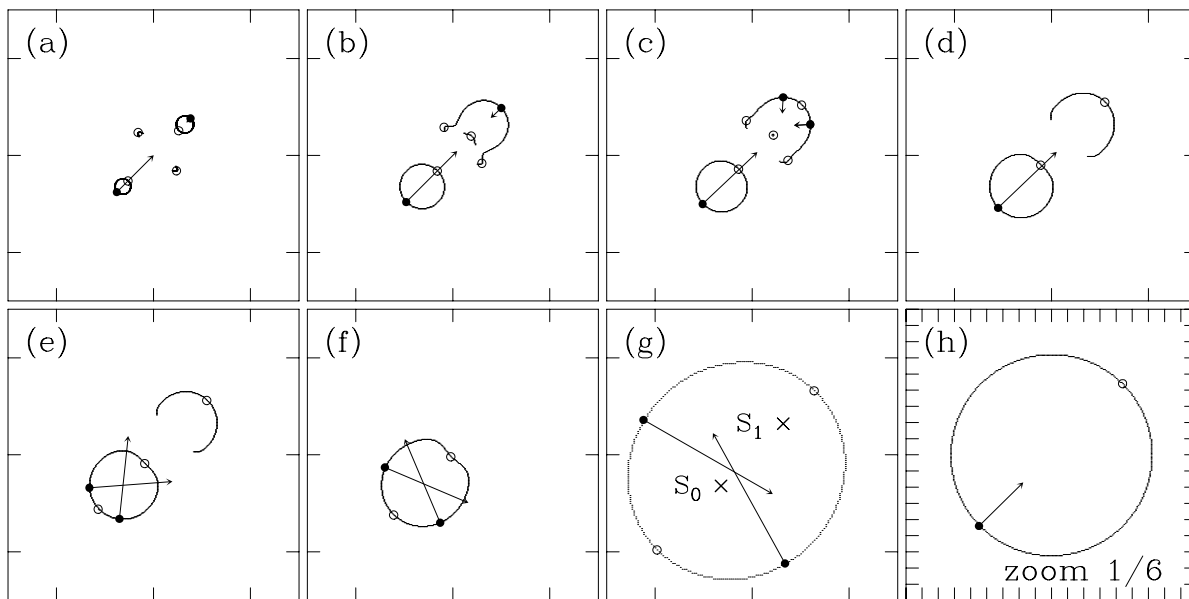


Fig. 2.11 – Chaînes de maxima (trait plein) constituées des MMTO de la fonction f_3 calculés avec une ondelette analysatrice ψ d'ordre $n_\psi = 3$ (ϕ est le chapeau mexicain isotrope). Les maxima (respectivement minima) locaux du module $\mathcal{M}_\psi[f_3]$ le long de ces chaînes, sont représentés par les symboles (\bullet) (respectivement (\circ)). Les flèches représentent le vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f_3]$ aux MMMTO. Les échelles sont $a = 2^{3.3}\sigma_W$ (a), $2^{4.8}\sigma_W$ (b), $2^{5.0}\sigma_W$ (c), $2^{5.3}\sigma_W$ (d), $2^{5.4}\sigma_W$ (e), $2^{5.7}\sigma_W$ (f), $2^{7.0}\sigma_W$ (g) et $2^{9.5}\sigma_W$ (h).

tout comme dans l'exemple 2, deux lignes de maxima qui pointent respectivement vers les singularités S_0 et S_1 . Le comportement de $\mathbf{T}_\psi[f_3]$ le long de ces lignes caractérise à nouveau la régularité de f_3 aux points \mathbf{x}_0 et \mathbf{x}_1 : à la limite des petites échelles, $\mathcal{M}_\psi[f_3]$ suit une loi de puissance d'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0) = 0.3$ le long de $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ et d'exposant $h(\mathbf{x}_1) = 0.8$ le long de $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_1}(a)$. Précisons que nous avons obtenu exactement les mêmes résultats que ceux rapportés dans les figures 2.11, 2.10b et 2.10d lors du calcul des lignes de maxima de la transformée en ondelettes de la fonction f_2 (c'est-à-dire sans composante linéaire) avec la même ondelette analysatrice d'ordre 3. Cela confirme que cette ondelette est complètement aveugle à toute tendance linéaire qui pourrait polluer l'étude des singularités d'une surface.

Exemple 4. Singularité anisotrope

Nous illustrons dans cet exemple le concept d'invariance d'échelle locale anisotrope par rapport à des dilatations isotropes. La surface représentée dans la figure 2.12a est définie par la fonction f_4 :

$$f_4(\mathbf{x}) = f_4(\rho, \theta) = -\rho^{h(\theta)}, \quad (2.56)$$

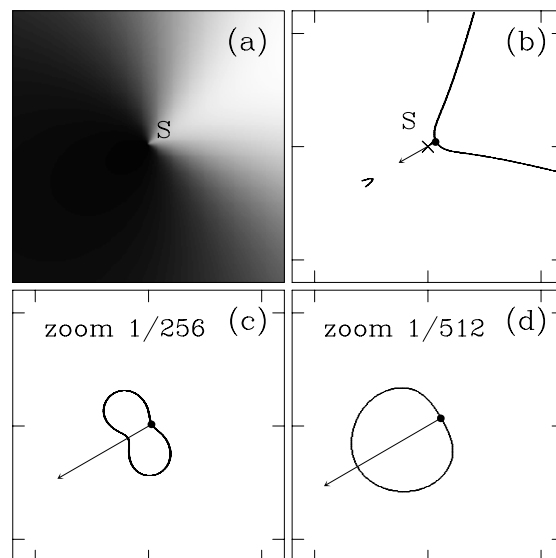


Fig. 2.12 – Analyse MMTO 2D de la fonction f_4 définie par l'équation (2.56). (a) $f_4(\mathbf{x})$ codée du blanc ($\min f_4$) au noir ($\max f_4$). Les chaînes de maxima (trait plein) et les MMTO (\bullet) sont représentés pour les valeurs suivantes du paramètre d'échelle $a = 2\sigma_W$ (b), $2^8\sigma_W$ (c) et $2^{11}\sigma_W$ (d). L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ utilisée dans la figure 2.3.

avec

$$h(\theta) = 0.3 \sin(\theta - 2\pi/3) + 0.5. \quad (2.57)$$

$h(\theta)$ est la valeur de l'exposant de Hölder en $\mathbf{x}_0 = 0$, d'une coupe de f_4 passant par l'origine et faisant un angle θ avec l'axe des x . Pour le problème 2D qui nous intéresse, l'exposant de Hölder de la singularité S localisée en \mathbf{x}_0 est donc $h(\mathbf{x}_0) = \min_\theta h(\theta)$. Cette valeur $h(\mathbf{x}_0) = 0.2$ est obtenue suivant la coupe d'angle $\pi/6$ qui est la direction selon laquelle f_4 présente sa plus grande variation à partir de S. Les figures 2.12b, 2.12c et 2.12d représentent les chaînes de maxima et les MMTO obtenus pour plusieurs valeurs de l'échelle a . On constate que les MMTO sont positionnés, par rapport à S, dans la direction donnée par $\theta_{\mathbf{x}_0} = \pi/6$, et forment une ligne de maxima unique. Le long de cette ligne, le module $\mathcal{M}_\psi[f_4]$ se comporte en loi de puissance avec un exposant $h(\mathbf{x}_0) = 0.2$ (Fig. 2.13a), en bon accord avec la prédiction théorique. L'argument $\mathcal{A}_\psi[f_4] = -5\pi/6 = \theta_{\mathbf{x}_0} - \pi$ (Fig. 2.13b) est constant et définit la direction de variation maximum de f_4 autour de l'origine. Il est important de remarquer qu'ici cette direction privilégiée est déterminée par l'existence d'un exposant d'invariance d'échelle minimum alors que dans les exemples précédents les directions privilégiées observées résultaient de l'importance relative de préfacteurs caractérisant la compétition de singularités (ou structures localisées) isotropes.

Exemple 5. Singularités autoaffines

Nous ne traiterons pas ici le cas de l'invariance d'échelle suivant des dilatations anisotropes

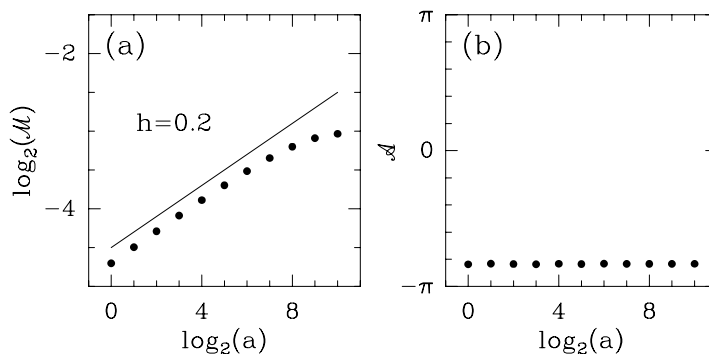


Fig. 2.13 – Évolution de $\mathcal{M}_\psi[f_4]$ (a) et de $\mathcal{A}_\psi[f_4]$ (b) en fonction de l'échelle a le long de la ligne de maxima $\mathcal{L}_{\mathbf{x}_0}(a)$ (●) qui pointe vers la singularité S localisée à l'origine. L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ utilisée dans la figure 2.12.

autoaffines. Nous renvoyons le lecteur à la section 2.6 où la méthode MMTO 2D sera utilisée pour l'analyse de surfaces rugueuses aléatoires autoaffines.

Ces différents exemples illustrent parfaitement l'importance des lignes de maxima, obtenues par chaînage des MMTO à travers les échelles, pour la détection et la caractérisation des singularités ponctuelles d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , dans la mesure où le nombre n_ψ de moments nuls de l'ondelette analysatrice est suffisamment important. Ainsi, si aucune ligne ne converge vers un point \mathbf{x}_0 donné, alors la fonction f est n_ψ Lipschitzienne en \mathbf{x}_0 ; autrement dit $h(\mathbf{x}) \geq n_\psi$ dans un voisinage de \mathbf{x}_0 . Si une ligne de maxima pointe vers \mathbf{x}_0 , alors on peut extraire l'exposant de Hölder de la singularité située en \mathbf{x}_0 en observant le comportement en loi de puissance du module $\mathcal{M}_\psi[f]$ du vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi[f]$ le long de cette ligne. L'évolution de l'argument $\mathcal{A}_\psi[f]$ de $\mathbf{T}_\psi[f]$ fournit une information directionnelle sur les grandes variations de f autour de \mathbf{x}_0 . Comme le montre l'exemple 1, il se peut qu'une ligne de maxima pointe vers un point qui ne correspond pas à une singularité. Dans ce cas le comportement en la loi de puissance du module $\mathcal{M}_\psi[f]$ est gouverné par l'ordre n_ψ de l'ondelette analysatrice. Ainsi, en augmentant le nombre de moments nuls de l'ondelette, on peut espérer distinguer et donc séparer ces lignes de maxima de celles associées aux singularités, par un simple seuillage sur la valeur de $\mathcal{M}_\psi[f]$ aux petites échelles. Les lignes de maxima restantes constituent le *squelette* de la transformée en ondelettes 2D, qui est à la base de la description multifractale des surfaces rugueuses présentée dans la section 2.4.

2.4 La méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes 2D

Cette section est consacrée à la description de la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes 2D, qui est destinée à l'étude des propriétés multifractales d'une

surface rugueuse déterministe ou aléatoire. Au préalable, il est nécessaire de définir la notion de spectre des singularités d'une fonction fractale de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Définition 1 Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et S_h l'ensemble de tous les points \mathbf{x}_0 pour lesquels l'exposant de Hölder (Éq. (2.34)) de f en \mathbf{x}_0 est h . Le spectre des singularités $D(h)$ de f est la fonction qui associe à chaque valeur de h , la dimension de Hausdorff de l'ensemble S_h :

$$D(h) = d_H\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, h(\mathbf{x}) = h\}. \quad (2.58)$$

Nous avons vu dans la section précédente, que le squelette de la transformée en ondelettes 2D, constitué des lignes de maxima (MMMTO), est un outil très performant pour l'étude des singularités d'une surface. Non seulement ces lignes de maxima permettent de localiser précisément ces singularités, mais elles permettent aussi de les identifier via l'estimation de leur force donnée par l'exposant de Hölder h . Une manière naturelle d'obtenir le spectre des singularités $D(h)$ serait donc de mesurer – par un simple algorithme de comptage de boîtes [44, 63, 65–71] – la dimension fractale de l'ensemble des points $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^2$, vers lesquels convergent les lignes de maxima selon lesquelles $\mathcal{M}_\psi[f]$ se comporte en loi de puissance avec un exposant h donné (Éq. 2.51). Malheureusement, cette vision « locale » de la répartition des singularités n'est plus adaptée dès lors que l'on s'intéresse aux fonctions fractales, qu'elles soient aléatoires ou déterministes. En effet, la caractéristique principale d'une fonction fractale est qu'elle possède une distribution hiérarchique de singularités [33–36, 46–50]. Ainsi l'estimation locale de l'exposant de Hölder $h(\mathbf{x}_0)$ en un point \mathbf{x}_0 donné, dépend désormais de l'accumulation des singularités autour de ce point. Cette accumulation se manifeste par la présence d'oscillations voire de fluctuations dans le comportement de $\mathcal{M}_\psi[f]$ le long des lignes de maxima [38, 46–50], rendant ainsi impossible l'estimation précise de $h(\mathbf{x}_0)$ [136, 137]. En effet, à chaque échelle a , la valeur du module reflète l'influence de l'accumulation des singularités autour du point \mathbf{x}_0 qui sont à une distance a . Malgré différentes tentatives pour contourner ce problème en 1D [38, 138], il demeure des limitations fondamentales dans l'estimation de l'exposant de Hölder local d'une surface multifractale (2D) ou d'un profil multiaffine (1D), qui ne sont pas spécifiques à la transformée en ondelettes. Il est donc nécessaire d'adopter une approche statistique plus globale pour pouvoir estimer correctement le spectre des singularités $D(h)$. La méthodologie que nous préconisons va consister à passer d'une lecture locale à une lecture globale du squelette de la transformée en ondelettes en s'inspirant des fondements du formalisme multifractal [39–48, 50, 92, 93, 95].

2.4.1 Méthodologie

Notre stratégie consiste à généraliser la méthodologie présentée dans les Réfs [46–50] – originellement destinée à l'analyse multifractale de signaux 1D – à l'étude statistique des fluctuations de rugosité de surfaces multifractales [120, 122]. Le squelette de la transformée en ondelettes défini dans la section 2.3.3 est la base de la méthode MMTTO 2D. Constitué de

l'ensemble des lignes de maxima qui pointent vers les singularités de f , ce squelette réalise un partitionnement du demi-hyperplan espace-échelles contenant toute l'information sur la structure hiérarchique des singularités de la surface étudiée. Appelons $\mathcal{L}(a)$ l'ensemble des lignes de maxima du squelette de la transformée en ondelettes qui existent à l'échelle a . Par construction, toute ligne de cet ensemble possède des MMMTO à toutes les échelles a' plus petites que a ; on a donc la relation $\mathcal{L}(a) \subset \mathcal{L}(a')$ pour $a' < a$. En ce qui concerne les fonctions fractales, l'organisation hiérarchique des singularités entraîne que le nombre de MMMTO diverge dans la limite $a \rightarrow 0^+$. La méthode MMTO 2D consiste à définir des fonctions de partition à partir des valeurs du module des MMMTO appartenant au squelette de la transformée en ondelettes :

$$\mathcal{Z}(q, a) = \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}(a)} (\mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{x}, a))^q, \quad (2.59)$$

où $q \in \mathbb{R}$. Si on compare la méthode MMTO 2D aux techniques classiques de comptage de boîtes [44, 63, 65–71], on peut concevoir les ondelettes comme des « boîtes oscillantes » généralisées, dont la taille est donnée par a , et dont la position est indiquée par les MMMTO appartenant au squelette de la transformée en ondelettes; c'est en ce sens que celui ci fournit une partition de l'ensemble $S \subset S_h$ à l'échelle considérée. Notons qu'une définition de $\mathcal{Z}(q, a)$ similaire à celle du cas 1D pourrait être utilisée en prenant le module $\sup_{(\mathbf{x}, a') \in \mathcal{L}, a' < a} \mathcal{M}_\psi(\mathbf{x}, a')$ au lieu du module $\mathcal{M}_\psi(\mathbf{x}, a)$ dans l'équation (2.59). En effet, comme cela est précisé dans les Réfs [46–50], le « sup » définit une partition dans les échelles qui permet d'éviter les divergences dans l'évaluation de $\mathcal{Z}(q, a)$ pour les valeurs négatives de q . Ces divergences interviennent lorsqu'une valeur de \mathcal{M}_ψ est proche de 0. Cependant, ce cas de figure, qui n'est pas anecdotique à 1D (même lorsque l'on s'intéresse uniquement aux MMTO 1D), est extrêmement rare à 2D de par la définition de \mathcal{M}_ψ (Éq. (2.25)) qui est la racine carrée de la somme de deux carrés. Cette situation malencontreuse est désormais très rare pour les MMTO 2D et de probabilité quasiment nulle pour les MMMTO. Cependant, une autre justification de l'utilisation de ce « sup », est qu'il permet une sélection adaptative dans les échelles qui n'est pas sans rappeler la définition de la dimension de Hausdorff. Cette approche possède un intérêt dans certaines situations où il est nécessaire d'accéder à une sorte d'enveloppe supérieure du comportement dans les échelles de $\mathcal{Z}(q, a)$, comme, par exemple, pour éliminer (ou du moins régulariser) les oscillations observées dans le comportement en loi de puissance des fonctions de partition associées à des cantors déterministes (invariance d'échelle discrète) [46, 48].

L'analogie entre le formalisme multifractal et la thermodynamique [39–41, 45, 46, 48, 93] permet d'anticiper pour la fonction de partition un comportement en loi de puissance en fonction de l'échelle a :

$$\mathcal{Z}(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad a \rightarrow 0^+, \quad (2.60)$$

où $\tau(q)$ et q jouent respectivement les rôles de l'énergie libre et de l'inverse de la température. Le principal résultat du formalisme multifractal est que l'exposant de Hölder h (Éq. (2.34)) et le spectre des singularité $D(h)$ (Éq. (2.58)) sont les variables conjuguées de

q et de $\tau(q)$, c'est-à-dire l'équivalent de l'énergie et de l'entropie. Cela veut dire que l'on peut obtenir le spectre des singularités $D(h)$ de f par simple transformation de Legendre des exposants $\tau(q)$:

$$D(h) = \min_q(qh - \tau(q)). \quad (2.61)$$

On dit qu'une fonction fractale est *homogène* (ou *monofractale*), si la totalité de ses singularités correspondent à une valeur unique de h , c'est-à-dire si le spectre des singularités $D(h)$ se réduit à un seul point. Ainsi, par transformation de Legendre inverse de $D(h)$ (qui est aussi une transformation de Legendre), on en déduit que l'exposant $\tau(q)$ se comporte linéairement en fonction de q ($h = \partial\tau/\partial q$ d'après les propriétés de la transformation de Legendre). À l'inverse, un comportement non-linéaire de $\tau(q)$ est caractéristique d'une fonction *multifractale*, c'est-à-dire que la valeur de l'exposant de Hölder $h(\mathbf{x})$ dépend de la position \mathbf{x} sur la surface dans la mesure où les différentes singularités ne sont pas toutes de même force.

Remarque

Pour certaines valeurs spécifiques de q les exposants $\tau(q)$ ont une signification particulière [48, 122].

- $q = 0$. On déduit des équations (2.59) et (2.60), que $\tau(0)$ caractérise la divergence du nombre de MMMTO à la limite $a \rightarrow 0^+$. Ce nombre quantifie le nombre d'ondelettes de taille a nécessaires pour recouvrir l'ensemble S des singularités de f . Par analogie avec les techniques de comptage de boîtes [44, 63, 65–71], on peut associer la valeur $-\tau(0)$ à la dimension fractale (capacité) de l'ensemble S :

$$-\tau(0) = d_F\{\mathbf{x}, h(\mathbf{x}) < +\infty\}. \quad (2.62)$$

- $q = 1$. La valeur $\tau(1)$ peut être reliée à la dimension fractale de la surface \mathcal{S} définie par la fonction f [48] :

$$d_F(\mathcal{S}) = \max(2, 1 - \tau(1)). \quad (2.63)$$

- $q = 2$. Il est facile de démontrer que l'exposant $\tau(2)$ est relié à l'exposant β de la densité spectrale (Éq. (2.33)) :

$$\tau(2) = \beta - 4. \quad (2.64)$$

D'un point de vue numérique, l'estimation de la transformée de Legendre (Éq. (2.61)) nécessite de pouvoir estimer la dérivée de τ pour les valeurs de q considérées. Cette estimation numérique passe par un lissage de la fonction $\tau(q)$ et possède un inconvénient majeur. En effet, ce lissage empêche de détecter tout comportement non analytique dans les courbes $\tau(q)$ et $D(h)$. Ainsi, il n'est pas possible d'observer d'éventuelles *transitions de phase* [43, 46, 139, 140] dans les propriétés d'invariance d'échelle des fonctions fractales étudiées. Les Réfs [46, 139, 141–145] proposent une méthode qui permet d'évaluer le spectre des

singularités $D(h)$ autrement que par transformation de Legendre de $\tau(q)$. Cette stratégie consiste à évaluer les exposants des quantités $h(q, a)$ et $D(q, a)$ qui sont définies comme des moyennes « canoniques » calculées à partir de poids de Boltzmann sur les MMMTO [38, 46] :

$$W_\psi[f](q, \mathcal{L}, a) = \frac{|\mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{x}, a)|^q}{\mathcal{Z}(q, a)}, \quad (2.65)$$

où $\mathcal{Z}(q, a)$ est la fonction de partition définie par l'équation (2.59). On calcule donc les moyennes

$$h(q, a) = \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}(a)} \ln |\mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{x}, a)| W_\psi[f](q, \mathcal{L}, a), \quad (2.66)$$

et

$$D(q, a) = \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}(a)} W_\psi[f](q, \mathcal{L}, a) \ln(W_\psi[f](q, \mathcal{L}, a)), \quad (2.67)$$

dont on extrait les exposants des comportements en loi de puissance

$$h(q) = \lim_{a \rightarrow 0^+} h(q, a) / \ln a, \quad (2.68)$$

$$D(q) = \lim_{a \rightarrow 0^+} D(q, a) / \ln a, \quad (2.69)$$

permettant ainsi d'accéder au spectre des singularités $D(h)$.

2.4.2 Densités de probabilité

La somme discrète dans la définition de la fonction de partition (Éq. (2.59)) peut être réécrite sous la forme d'une intégrale continue sur le module $\mathcal{M}_\psi[f]$ des MMMTO :

$$\mathcal{Z}(q, a) / \mathcal{Z}(0, a) = \langle \mathcal{M}^q \rangle (a) = \int d\mathcal{M} \mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M}), \quad (2.70)$$

où \mathcal{M} est une forme condensée de $\mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{x}, a)$ (ou de $\sup_{(\mathbf{x}, a') \in \mathcal{L}, a' < a} \mathcal{M}_\psi[f](\mathbf{x}, a')$, en cas de sélection adaptative dans les échelles). La description multifractale consiste donc à caractériser l'évolution dans les échelles des moments de la densité de probabilité (pdf, de l'anglais *probability density functions*) $P_a(\mathcal{M})$ du module \mathcal{M} . Le spectre d'exposants $\tau(q)$ caractérise donc comment évolue la forme de la pdf de \mathcal{M} dans les échelles. Comme nous l'avons signalé dans la section précédente, par définition du squelette de la transformée en ondelettes, \mathcal{M} prend rarement des valeurs proches de zéro. En général cela se manifeste par une décroissance exponentielle de $P_a(\mathcal{M})$ en 0, qui rend possible le calcul des exposants $\tau(q)$ pour des valeurs de q négatives [46–50]. Par transformation de Legendre (Éq. (2.61)) on a donc aussi accès à la partie décroissante du spectre multifractal $D(h)$.

Comme nous l'avons présentée dans la section 2.4.1, la méthode MMTO 2D n'exploite pas toute l'information contenue dans le squelette de la transformée en ondelettes 2D. En fait

elle met en jeu uniquement le module \mathcal{M}_ψ du vecteur gradient \mathbf{T}_ψ . Comme nous l'avons vu dans la section 2.3.3, il est vrai que c'est bien \mathcal{M}_ψ qui contient toute l'information sur la force des singularités. Cependant, il serait judicieux d'exploiter aussi l'information directionnelle que fournit l'argument \mathcal{A}_ψ de \mathbf{T}_ψ , en étudiant, par exemple, la pdf $P_a(\mathcal{A})$ de l'angle \mathcal{A}_ψ . L'idéal serait d'exploiter simultanément l'information fournie par \mathcal{M}_ψ et \mathcal{A}_ψ en suivant l'évolution dans les échelles de la pdf du vecteur gradient $P_a(\mathbf{T})$ qui peut être vue comme la densité de probabilité jointe $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ [129]. À cette fin, nous distinguerons deux cas :

- **\mathcal{M} et \mathcal{A} sont indépendants.** Cela signifie que, quelle que soit l'échelle a , on peut factoriser la pdf du vecteur gradient :

$$P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = P_a(\mathcal{M})P_a(\mathcal{A}). \quad (2.71)$$

Cette factorisation indique que l'on peut estimer le spectre des singularités $D(h)$, comme il est défini dans la page 69, en se concentrant uniquement sur $P_a(\mathcal{M})$ et sans se soucier du comportement dans les échelles de $P_a(\mathcal{A})$. Autrement dit, une singularité d'exposant de Hölder h donné est présente dans toutes les directions et à une direction donnée correspond l'ensemble des singularités d'exposant de Hölder différentes présentes dans la surface. Si la distribution $P_a(\mathcal{A})$ est plate, c'est la signature que la surface possède des propriétés d'invariance d'échelle isotropes. Dans le cas contraire, si $P_a(\mathcal{A})$ est non uniforme, cela signifie qu'une certaine anisotropie est présente dans la structure de la surface étudiée. Cette anisotropie peut varier dans les échelles, entraînant dans ce cas une évolution de la forme de $P_a(\mathcal{A})$ en fonction de a , indiquant que la répartition directionnelle des vecteurs gradient varie dans les échelles sans pour autant être couplée à l'évolution du module. Quel que soit son comportement dans les échelles, et même si notre principale préoccupation est la limite $a \rightarrow 0^+$, l'évolution de la forme de $P_a(\mathcal{A})$ fournit une information très importante sur les éventuels changements de structure de l'image analysée. Remarquons que l'existence possible de directions privilégiées peut être mise en évidence en étudiant les corrélations entre les valeurs de \mathcal{A} de MMMTO appartenant à des lignes de maxima différentes.

- **\mathcal{M} et \mathcal{A} sont dépendants.** Si l'équation (2.71) n'est pas vérifiée, alors la surface rugueuse étudiée a de grandes chances de posséder des propriétés d'invariance d'échelle anisotropes. Afin de caractériser cette anisotropie, on peut calculer la fonction de partition conditionnée par l'angle \mathcal{A} du vecteur gradient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}(q, a) &= \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}(0, a) \int d\mathcal{M} \mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A}), \\ &\sim a^{\tau_{\mathcal{A}}(q)}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Par transformation de Legendre de $\tau_{\mathcal{A}}(q)$, on obtient ainsi le spectre $D_{\mathcal{A}}(h)$ des singularités associées à la direction privilégiée $\theta = \mathcal{A} - \pi$. L'étude de la dépendance de $D_{\mathcal{A}}(h)$ en fonction de \mathcal{A} permet alors d'explorer les propriétés multifractales anisotropes de l'image analysée.

Remarque

Il existe dans la littérature d'autres tentatives de caractérisation de propriétés multifractales anisotropes à l'aide de la transformée en ondelettes. Dans le cadre de l'analyse de données géophysiques de réseaux de fractures, Ouillon *et al* [146–148] ont utilisé des ondelettes anisotropes « optimales » pour révéler l'existence d'orientations privilégiées dans certaines gammes d'échelles d'observation. Cette analyse leur a permis de caractériser l'organisation des différentes couches minérales du sol étudié. D'un point de vue mathématique, Ben Silmane [135] a récemment proposé une généralisation du formalisme multifractal aux fonctions autosimilaires anisotropes. Sa stratégie consiste à revoir la définition de la transformée en ondelettes 2D afin d'intégrer dans l'optique de ce microscope mathématique la possibilité d'effectuer des grossissements anisotropes.

2.4.3 Mise en œuvre numérique

Cette section est consacrée à la présentation de la mise en œuvre numérique de la méthode MMTO 2D appliquée à des images discrètes $N \times N$ de surfaces rugueuses.

Calcul de la transformée en ondelettes 2D

Le calcul de la transformée en ondelettes 2D, dans sa formulation donnée dans la section 2.2.3, nécessite d'effectuer une convolution par composante de ψ et par échelle de l'analyse. Ces calculs utilisent la démarche présentée dans le chapitre 1. Comme l'indique la section 1.3.3, l'intervalle $[a_{\psi \min}, a_{\psi \max}]$ des échelles accessibles par une ondelette ψ pour une image de taille $N \times N$, peut être déterminée avec précision. La gamme d'échelles $\{a_{\min}, \dots, a_{\max}\}$ explorée dans une étude particulière doit donc impérativement être incluse dans cet intervalle. Au niveau de la gestion des effets de bords, la stratégie choisie dans ce travail consiste à périodiser l'image et à ne prendre que les points de la transformée en ondelettes qui ne sont pas pollués par ces effets de taille finie (voir section 1.2.4). La taille de la zone concernée varie en fonction de l'échelle d'analyse. Cependant il est nécessaire que les données conservées à chaque échelle correspondent à une même zone de l'image d'origine. La taille de cette zone est donc déterminée par l'échelle la plus restrictive, à savoir la plus grande échelle (a_{\max}) de notre analyse.

Recherche des MMTO

L'étape suivante consiste à déterminer à chaque échelle les points qui appartiennent aux chaînes de maxima définies dans la section 2.3.3. Ces MMTO sont les points pour lesquels le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ qui définit la transformée en ondelettes, possède un module \mathcal{M}_ψ qui est maximum dans la direction \mathcal{A}_ψ de ce gradient. L'algorithme le plus naturel consiste à comparer le module \mathcal{M}_ψ calculé à un point donné, avec les valeurs obtenues à certains de ses huit voisins (sélectionnés en fonction de l'angle \mathcal{A}_ψ) du réseau carré de l'image

numérique. Toutefois cette méthode présente un inconvénient majeur : le réseau carré entraîne une mauvaise estimation du comportement de \mathcal{M}_ψ dans la direction \mathcal{A}_ψ . Même si cette estimation est correcte dans les directions des huit voisins du point considéré, pour toute autre direction il est nécessaire d'adopter une stratégie d'interpolation. Mais aussi parfaite qu'elle soit, cette interpolation introduira toujours un biais anisotrope dans la sélection des MMTO. Bien qu'il soit plus complexe, l'algorithme que nous préconisons possède l'avantage de sélectionner un point sans devoir le comparer à ses voisins. Ainsi le réseau carré de l'image ne perturbe plus cette sélection. Cet algorithme consiste à calculer la dérivée \mathcal{K} de \mathcal{M}_ψ dans la direction \mathcal{A}_ψ et de sélectionner les points pour lesquels \mathcal{K} est nul. L'ensemble ainsi obtenu contient non seulement les MMTO, mais aussi les points pour lesquels le module \mathcal{M}_ψ de \mathbf{T}_ψ présente un minimum dans la direction \mathcal{A}_ψ . Afin de distinguer ces deux ensembles de points, il est nécessaire de détecter si \mathcal{K} est croissant ou décroissant dans la direction \mathcal{A}_ψ au point considéré. Pour cela, on calcule la dérivée \mathcal{K}' de \mathcal{K} , toujours dans la direction \mathcal{A}_ψ , dont le signe indique si l'on est en présence d'un maximum ($\mathcal{K}' < 0$) ou d'un minimum ($\mathcal{K}' > 0$). Ces deux grandeurs peuvent être évaluées en tout point \mathbf{x} indépendamment de ses voisins. Elles s'obtiennent par des combinaisons sur les convolutions de l'image par les dérivées successives (suivant x et y , et jusqu'à l'ordre 3) de la fonction lissante ϕ . En effet, les expressions de \mathcal{K} et de \mathcal{K}' mettent en jeu des dérivées du champ $I \star \phi$. La propriété de différenciation du produit de convolution (Éq. (1.36)) permet de reporter l'opérateur dérivée sur la fonction ϕ qui est connue analytiquement.

Recherche des MMMTO à partir des chaînes de maxima

Les MMTO sont ensuite connectés par un algorithme de chaînage afin d'obtenir les chaînes de maxima à l'échelle considérée. Cet algorithme regroupe les MMTO en listes ordonnées (par rapport à leur position), débouchant sur des lignes discrètes, fermées ou ouvertes et qui ne possèdent pas de branchements. On cherche ensuite les points de ces chaînes de maxima dont le module \mathcal{M}_ψ est localement maximum le long de la chaîne. Un MMMTO est donc un point d'une des listes ordonnées dont le module est plus grand que ceux de son prédécesseur et de son successeur dans la liste. Ainsi, dans le cas des chaînes de maxima ouvertes, le premier et le dernier MMTO d'une liste (les bouts de la chaîne) ne peuvent être sélectionnés, même si leur module est supérieur à celui de leur voisin. Encore une fois, le réseau carré entraîne un biais dans la recherche de ces points. En effet, la chaîne de maxima est composée de points appartenant à ce réseau : elle n'est donc qu'une approximation en « escalier » de la chaîne réelle, et l'évolution du module le long de cette approximation peut donc présenter des oscillations en « dents de scie » autour de la valeur théorique de \mathcal{M}_ψ le long de la chaîne réelle. Des points qui ne sont pas des MMMTO peuvent alors être détectés comme tels par notre algorithme. La solution pour contourner ce problème consiste à estimer la valeur théorique de \mathcal{M}_ψ par interpolation entre les points de notre chaîne discrète.

Calcul du squelette de la transformée en ondelettes 2D

Maintenant que les MMMTO ont été sélectionnés, on construit le squelette de la transformée en ondelettes en les connectant à travers les échelles. Pour cela, on démarre de la plus petite échelle a_{\min} . Chaque MMMTO de cette échelle sert de racine pour une ligne de maxima que nous allons faire pousser à travers les échelles. On cherche, à l'échelle immédiatement supérieure, le MMMTO le plus proche et on le connecte à la ligne en question. S'il n'existe pas de tel MMMTO, alors la ligne de maxima s'achève. On répète cette opération d'échelle en échelle pour toutes les lignes de maxima, et ce, jusqu'à l'échelle a_{\max} , et à chaque échelle on supprime les MMMTO qui n'ont pu être connectés à une ligne. L'ensemble de ces lignes forme le squelette de la transformée en ondelettes. Par construction toutes ces lignes prennent racine à la plus petite échelle, et c'est l'étude du comportement du gradient \mathbf{T}_ψ le long de ces lignes de maxima (dans la limite des petites échelles) qui va nous permettre d'extraire l'information pertinente pour l'étude des singularités de la surface considérée. Comme nous l'avons signalé dans la section 2.3.3, il est possible d'écarter les lignes de maxima qui correspondent à des comportements réguliers de la fonction f . Pour cela, on augmente l'ordre n_ψ de l'ondelette analysatrice, puis on effectue un seuillage de \mathcal{M}_ψ ($\sim a^{n_\psi}$) à petite échelle, pour éliminer les lignes concernées.

Notons que la précision de ce chaînage à travers les échelles dépend fortement de la finesse de la gamme d'échelles choisie. Le choix de l'échantillonnage dans les échelles est donc un compromis entre temps de calcul et qualité du squelette de la transformée en ondelettes. Pour la plupart des résultats présentés dans ce travail, nous avons choisi une gamme d'échelles décomposée en octaves (généralement 4) comprenant chacune 10 voix.

Calcul du spectre multifractal

Le squelette de la transformée en ondelettes ainsi déterminé, on calcule la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ suivant la définition (2.59) pour chaque échelle $a \in \{a_{\min}, \dots, a_{\max}\}$, et pour chaque valeur $q \in \{q_{\min}, \dots, q_{\max}\}$. Comme nous le discuterons dans la section suivante, le choix de la gamme de valeurs de q dépend de la statistique des données disponibles. En effet plus $|q|$ est grand, plus les événements dominants dans la somme $\mathcal{Z}(q, a)$ sont rares. Comme c'était déjà le cas pour les échelles, le choix du nombre de valeurs q est un compromis entre temps de calcul et précision de l'évaluation des exposants $\tau(q)$ (voir plus loin). Signalons cependant qu'il est souhaitable d'avoir une bonne résolution autour de $q = 0$, afin de caractériser au mieux les singularités qui sont les plus fréquemment rencontrées dans l'image considérée.

Du comportement linéaire de $\ln \mathcal{Z}(q, a)$ en fonction de $\ln a$ pour une valeur q donnée, on extrait la valeur de l'exposant $\tau(q)$. Afin d'éprouver la qualité de cette estimation, on teste la stabilité de cette régression linéaire en fonction de l'intervalle $[a_{\min}^*, a_{\max}^*] \subset [a_{\min}, a_{\max}]$ sur lequel elle est effectuée. Ceci nous permet d'estimer une barre d'erreur expérimentale sur la valeur de l'exposant $\tau(q)$ mesurée. On obtient ensuite le spectre des singularités $D(h)$ par transformation de Legendre de $\tau(q)$ sur l'ensemble des valeurs de q considérées (Éq. (2.61)).

Afin d'éviter l'utilisation délicate d'une transformation de Legendre numérique, on peut estimer $D(h)$ en calculant les fonctions de partition $h(q, a)$ (Éq. (2.66)) et $D(q, a)$ (Éq. (2.67)) afin d'estimer les exposants $h(q)$ (Éq. (2.68)) et $D(q)$ (Éq. (2.69)). L'estimation du spectre multifractal à partir d'un ensemble de réalisations d'un même processus (une collection d'images) peut se faire en utilisant différentes « moyennes » possibles [73] parmi lesquelles :

- **Moyenne trempée.** On obtient la courbe $\tau(q)$ en moyennant les valeurs de $\ln \mathcal{Z}(q, a)$ obtenues pour chaque image :

$$e^{\langle \ln \mathcal{Z}(q, a) \rangle} \sim a^{\tau(q)}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.73)$$

Ce qui revient à dire que $\tau(q)$ est la moyenne des exposants $\tau(q)$ obtenus pour chaque image.

- **Moyenne recuite.** Une autre possibilité est de calculer le spectre $\tau(q)$ après avoir moyenné la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ sur toutes les images :

$$\langle \mathcal{Z}(q, a) \rangle \sim a^{\tau(q)}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.74)$$

Pour toutes les études présentées dans ce travail, nous n'avons pas observé de différence significative dans l'évaluation des spectre $\tau(q)$ et $D(h)$ suivant la moyenne utilisée. C'est pourquoi nous ne présenterons, dans la suite, uniquement les résultats correspondant à des moyennes recuites.

Calcul des densités de probabilité

Dans un premier temps nous calculons la pdf $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ du vecteur gradient \mathbf{T}_ψ associé aux MMMTO appartenant au squelette de la transformée en ondelettes 2D. Afin de pouvoir étudier séparément le module \mathcal{M}_ψ et l'argument \mathcal{A}_ψ de ce gradient, on s'assure que l'équation (2.71) est vérifiée. Si tel est le cas on peut étudier séparément les distributions $P_a(\mathcal{M})$ et $P_a(\mathcal{A})$ pour toutes les échelles appartenant à la gamme d'étude. Comme nous l'avons signalé dans la section précédente, l'évolution de la forme de la pdf du module $P_a(\mathcal{M})$ permet de définir la gamme des valeurs de q accessibles à notre étude multifractale. Une façon pertinente d'estimer la statistique des valeurs de \mathcal{M} qui contribuent de façon dominante dans la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ pour une valeur de q donnée, est d'observer la régularité de la distribution $\mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M})$. Si cette distribution est mal définie et présente une apparence trop bruitée (à cause d'un manque de statistique), il devient malaisé d'en estimer l'intégrale (Éq.(2.70)) et par conséquent le calcul de $\mathcal{Z}(q, a)$ manque de précision. Cela intervient pour les grande valeurs de $|q|$, car augmenter $|q|$ revient à donner de l'importance à des valeurs de \mathcal{M} de plus en plus importantes ($q > 0$) ou de plus en plus petites ($q < 0$) qui sont dans les deux cas de plus en plus rares. La gamme $\{q_{\min}, \dots, q_{\max}\}$ des valeurs de q accessibles à notre analyse est donc déterminée par la richesse de notre échantillon statistique. Il est en effet absolument nécessaire de s'assurer de la convergence statistique des exposants $\tau(q)$ de la fonction de partition. Dans le cas où l'équation (2.71) n'est pas vérifiée, les statistiques de \mathcal{M} et de \mathcal{A} sont donc intimement reliées. Suivant la

définition (2.72) de $\mathcal{Z}(q, a)$ on peut calculer le spectre des exposants $\tau_{\mathcal{A}}(q)$ conditionné par la valeur de l'argument \mathcal{A} . Puis par transformation de Legendre on en déduit le spectre des singularités $D_{\mathcal{A}}(h)$ dont la dépendance dans l'argument \mathcal{A} est riche d'enseignement sur les propriétés d'invariance d'échelle anisotropes de la surface rugueuse analysée. Il est inutile de préciser que le fait de conditionner la statistique de \mathcal{M} par la valeur de \mathcal{A} accroît incontestablement le problème de convergence statistique et limite considérablement l'étendue de la gamme de valeurs de q accessibles à notre étude.

2.5 Application de la méthode MMTO 2D aux surfaces Browniennes fractionnaires isotropes

Le mouvement Brownien fractionnaire (fBm, de l'anglais *fractionnal Brownian motion*) introduit par Mandelbrot et Van Ness [149], est un modèle incontournable en analyse du signal et de l'image [2, 3, 5–21, 72–74]. À une dimension, le fBm fournit un très bon modèle pour les phénomènes physiques qui possèdent des corrélations sur de grandes distances, comme par exemple les bruits en « $1/f$ ». Le spectre de puissance d'un fBm se comporte en effet en loi de puissance $S(\omega) \sim 1/\omega^\beta$, où l'exposant spectral $\beta = 2H + 1$ est relié à l'exposant de Hurst H . À 1D le fBm a été copieusement utilisé comme cobaye pour tester les méthodes de mesure de l'exposant de rugosité H . Récemment, la transformée en ondelettes [150–155] est apparue comme une alternative sérieuse par rapport aux performances des méthodes classiques [76–79, 82–85, 156–158]. En effet, quelle qu'en soit l'approche (transformée en ondelettes discrète [154, 155, 159–165], transformée en ondelettes continue [166], décomposition en paquets d'ondelettes [167]), l'analyse en ondelettes fournit une estimation très précise de l'exposant de Hurst des fBms. Des études comparatives des performances de ces différentes méthodes ont été menées dans les Réfs [161–163]. De nombreux algorithmes de synthèse numérique des fBms ont été proposés dans la littérature. Parmi les méthodes de synthèse les plus connues, citons la méthode du déplacement moitié aléatoire (*random midpoint displacement*, en anglais), la méthode des additions successives aléatoires, la méthode par filtrage de la transformée de Fourier d'un bruit blanc, ainsi que la fonction fractale aléatoire de Weierstrass-Mandelbrot [2, 3, 72, 73, 168]. Cependant aucune de ces techniques ne permet de modéliser complètement les propriétés du fBm. Récemment, Sellan [169] a proposé une nouvelle approche très prometteuse, qui étend les précédents travaux d'analyse par transformée en ondelettes [150–152, 163, 170], et de plus fournit une méthode générale de synthèse des fBms. En effet, la vision multirésolution offerte par l'analyse en ondelettes permet une conception originale et facilite la mise en œuvre d'algorithmes de synthèse 1D très performants [171]. Bien évidemment, la généralisation à 2D ne présente aucune difficulté majeure, et fournit une alternative sérieuse aux méthodes existantes de synthèse d'images Browniennes fractionnaires par transformée ondelettes 2D [172].

Les fBms sont des fonctions autoaffines aléatoires homogènes qui ont été utilisées avec succès dans les Réfs [38, 46–48] pour calibrer la méthode MMTO 1D. Cette méthode s'est avérée être très performante pour révéler et caractériser les propriétés monofractales des fBms. De plus elle permet une mesure très précise de l'exposant de Hurst H [173]. Cette

section est destinée à l'application de la méthode MMTO 2D présentée dans la section 2.4 à des familles de réalisations de surfaces Browniennes fractionnaires.

2.5.1 Surfaces Browniennes fractionnaires

C'est Lévy [174] qui le premier a proposé une généralisation du mouvement Brownien en dimension supérieure à un. Son approche peut être tout à fait reprise pour la généralisation des fBms. Un fBm 2D $B_H(\mathbf{x})$ d'index $H \in]0, 1[$, est un processus dont les incréments sont stationnaires, de statistique Gaussienne, de moyenne nulle et dont la fonction de corrélation s'écrit sous la forme [2, 3, 72, 168, 174] :

$$\langle B_H(\mathbf{x})B_H(\mathbf{y}) \rangle = \frac{\sigma^2}{2} (|\mathbf{x}|^{2H} + |\mathbf{y}|^{2H} - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2H}), \quad (2.75)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne d'ensemble. La variance de ce processus est

$$\text{var}(B_H(\mathbf{x})) = \sigma^2 |\mathbf{x}|^{2H}. \quad (2.76)$$

Dans le cas du mouvement Brownien non-corrélé ($H = 1/2$), on retrouve bien le comportement classique de la variance $\text{var}(B_{1/2}(\mathbf{x})) = \sigma^2 |\mathbf{x}|$. On démontre facilement le caractère stationnaire des incréments $\delta B_{H,1}(\mathbf{x}) = B_H(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - B_H(\mathbf{x})$ où $\mathbf{l} = (\delta x, \delta y)$. En effet, la fonction de corrélation ne dépend que de $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ et de \mathbf{l} :

$$\langle \delta B_{H,1}(\mathbf{x})\delta B_{H,1}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{\sigma^2}{2} (|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{l}|^{2H} + |\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{l}|^{2H} - 2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2H}). \quad (2.77)$$

Pour $H = 1/2$, cette valeur est nulle, ce qui indique bien l'indépendance des incréments du Brownien classique. Pour les autres valeurs de H , ces incréments sont corrélés si $H > 1/2$ (marche aléatoire persistante) ou anticorrélés si $H < 1/2$ (marche aléatoire antipersistante). De plus la définition du fBm (Éq. (2.76)) implique la relation statistique :

$$B_H(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{u}) - B_H(\mathbf{x}_0) \simeq \lambda^H [B_H(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - B_H(\mathbf{x}_0)], \quad (2.78)$$

où \mathbf{u} est un vecteur unitaire et \simeq représente l'égalité en loi. Ainsi, les fBms 2D sont des processus autoaffines aléatoires, statistiquement invariants par des dilatations isotropes (Éq. (2.35)). L'index H correspond à l'exposant de Hurst de la surface : plus H est grand, plus la surface est régulière. Le fait que l'équation (2.78) soit valable pour toute position \mathbf{x}_0 et pour toute direction \mathbf{u} , entraîne les propriétés suivantes : toutes les réalisations de fBm sont continues, non-dérivables partout et présentent des propriétés d'invariance d'échelle isotropes associées à un exposant de Hölder unique $h(\mathbf{x}) = H$, $\forall \mathbf{x}$ [2, 3, 72, 173]. Ainsi une surface rugueuse Brownienne fractionnaire est la représentation d'une fonction fractale stochastique homogène caractérisée par un spectre des singularités réduit à un point unique :

$$\begin{aligned} D(h) &= 2 && \text{si } h = H, \\ &= -\infty && \text{si } h \neq H. \end{aligned} \quad (2.79)$$

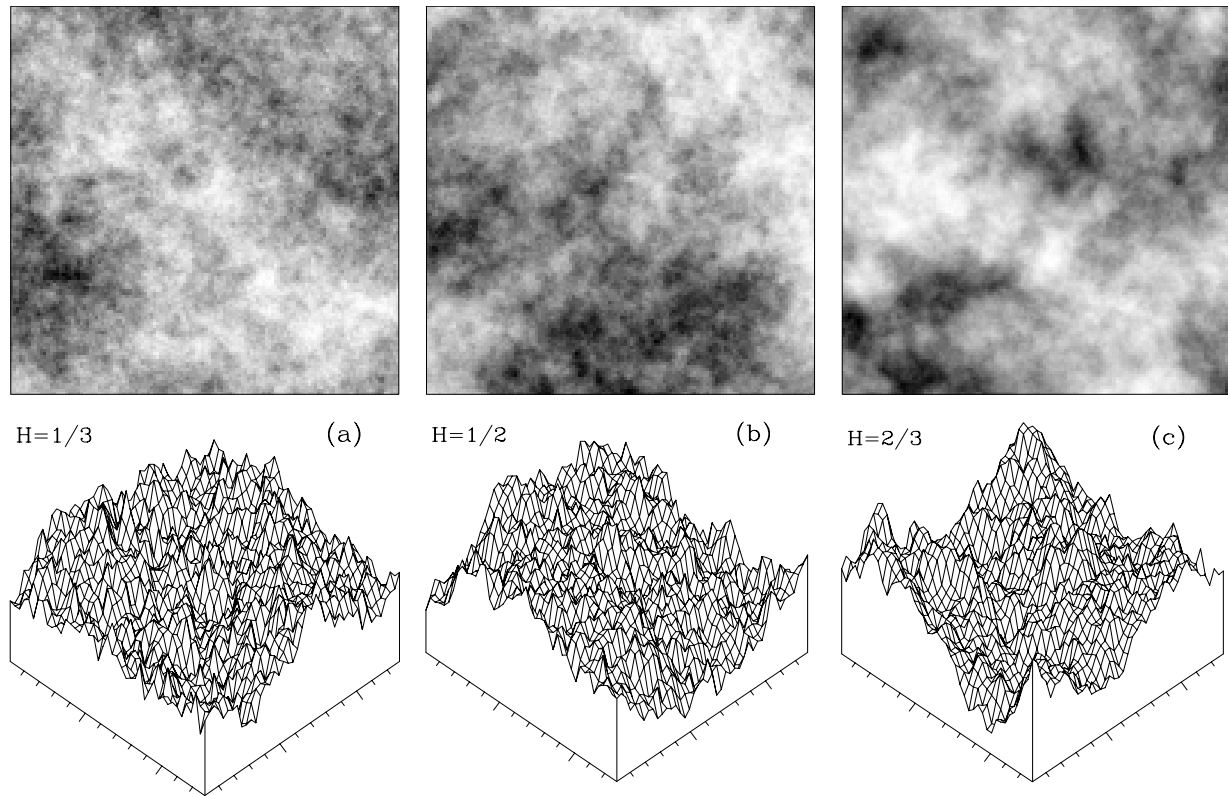


Fig. 2.14 – Surfaces Browniennes fractionnaires (128×128) générées par filtrage de la transformée de Fourier d'un bruit blanc. (a) $H = 1/3$; (b) $H = 1/2$; (c) $H = 2/3$. Dans la partie supérieure, $B_H(\mathbf{x})$ est codée du blanc ($\min B_H$) au noir ($\max B_H$).

Par transformation de Legendre de $D(h)$ (Éq. (2.61)), on obtient l'expression de l'exposant de la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ (Éq. (2.60)) :

$$\tau(q) = qH - 2. \quad (2.80)$$

Ce comportement linéaire de $\tau(q)$ est caractéristique de la monofractalité des surfaces fBms.

La figure 2.14 représente des surfaces fBms qui ont été générées par filtrage de la transformée de Fourier d'un bruit blanc [72, 73, 168]. Cette méthode a été choisie pour sa simplicité de mise en œuvre. En observant successivement les figures 2.14a ($H = 1/3$), 2.14b ($H = 1/2$) et 2.14c ($H = 2/3$), on constate que la surface est de plus en plus régulière lorsque l'index H augmente. Autrement dit, la dimension fractale des surfaces fBm passe continûment de 3 à 2 lorsque H parcourt l'intervalle $[0, 1]$:

$$d_F(\text{fBm } \mathcal{S}) = 1 - \tau(1) = 3 - H. \quad (2.81)$$

Lorsque H augmente, la surface fBm ressemble de plus en plus à une surface Euclidienne régulière 2D.

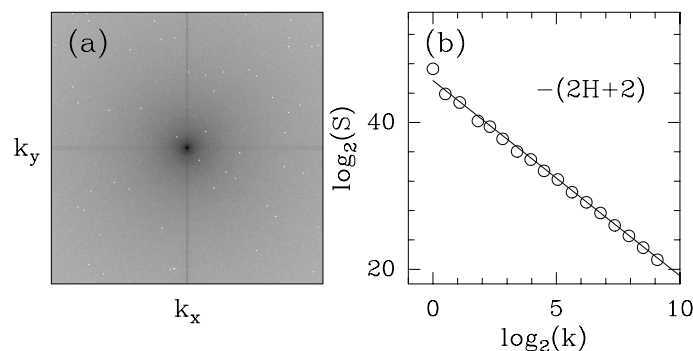


Fig. 2.15 – Analyse spectrale d’une image (1024×1024) d’une surface Brownienne $B_{1/3}$ d’exposant de rugosité $H = 1/3$. (a) $\ln |\hat{B}_{1/3}(\mathbf{k})|$ (Éq. (2.5)) codé du blanc ($\min \ln |\hat{B}_{1/3}|$) au noir ($\max \ln |\hat{B}_{1/3}|$). (b) Densité spectrale $S(|\mathbf{k}|)$ en fonction de $|\mathbf{k}|$ dans une représentation logarithmique. La trait plein correspond à la prédiction théorique de l’exposant spectral $\beta = 2H + 2 = 8/3$ (Éq. (2.82)).

La figure 2.15 présente les résultats de l’analyse spectrale d’une image (1024×1024) d’une surface Brownienne fractionnaire d’exposant de rugosité $H = 1/3$. La représentation de $\ln |\hat{B}_{1/3}(\mathbf{k})|$ dans la figure 2.15a, ne présente pas d’anisotropie très marquée (on reconnaît toutefois une légère anisotropie introduite par les effets de bords). La figure 2.15b met en évidence le comportement en loi de puissance de la densité spectrale en fonction du module du vecteur d’onde $|\mathbf{k}|$. L’exposant de cette loi de puissance est en parfait accord avec la prédiction théorique :

$$\beta = 4 + \tau(2) = 2 + 2H. \quad (2.82)$$

2.5.2 Calcul numérique des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$

Cette sous-section est consacrée à une application test de la méthode MMTO 2D (voir section 2.4), sur 32 réalisations d’un processus fBm d’exposant $H = 1/3$. À cette fin, nous commençons par calculer les squelettes des transformées en ondelettes de ces images (1024×1024) avec l’ondelette analysatrice isotrope d’ordre $n_\psi = 1$ illustrée dans les figures 2.1a et 2.1b. Les chaînes de maxima (MMTO) obtenues pour trois échelles différentes sont représentées dans la figure 2.16. En toile de fond sur la figure 2.16b, nous avons illustré le résultat de la convolution de l’image étudiée (Fig. 2.16a) avec la fonction lissante Gaussienne ϕ à l’échelle considérée (Éq. (2.22)). On constate que les chaînes de maxima correspondent aux contours prononcés de cette image lissée. Le long de ces chaînes de maxima, les MMTO se positionnent aux points (\bullet) de plus grande variation de la fonction considérée. Le module \mathcal{M}_ψ du vecteur gradient \mathbf{T}_ψ (représenté par une flèche dans les figures 2.16b, 2.16c et 2.16d) caractérise l’amplitude de cette variation et l’argument \mathcal{A}_ψ en indique la direction. Lorsque l’on compare les positions des MMTO aux différentes échelles, on constate que leur espacement caractéristique augmente linéairement avec a .

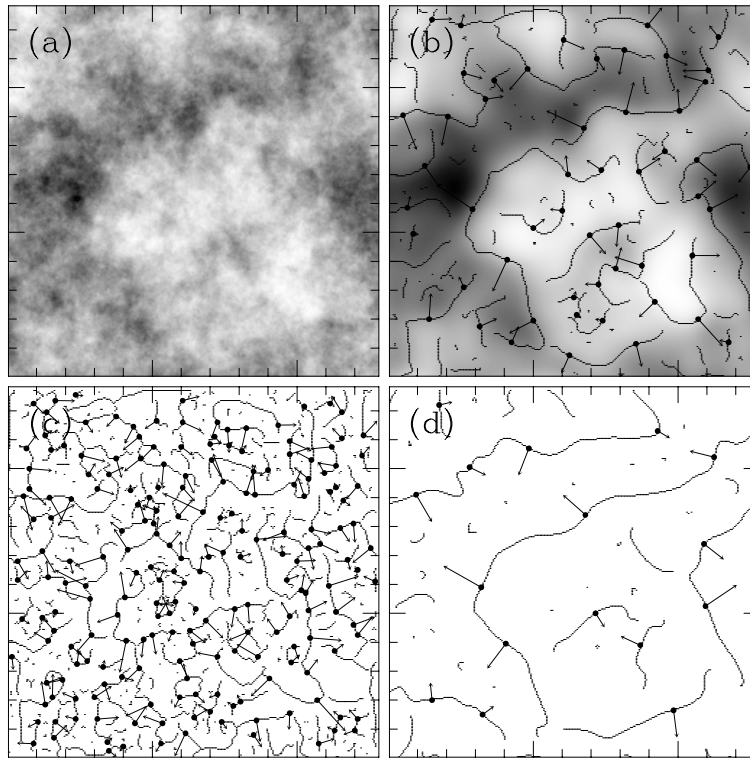


Fig. 2.16 – Analyse par transformée en ondelettes 2D d’une surface Brownienne fractionnaire $B_{H=1/3}$. ψ est une ondelette analysatrice isotrope d’ordre $n_\psi = 1$. (a) Image de la surface fBm codée du blanc (min $B_{H=1/3}$) au noir (max $B_{H=1/3}$). Chaînes de maxima (trait plein) calculées aux échelles suivantes : $a = 2\sigma_W$ (b), $2^{0.1}\sigma_W$ (c) et $2^{1.9}\sigma_W$ (d). Les flèches représentent le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ aux MMMTO (\bullet). Le fond en nuances de gris dans (b) représente l’image lissée $\phi_a \star B_{1/3}$ à l’échelle $a = 2\sigma_W$ codée du blanc (min) au noir (max).

Leur nombre, et donc le nombre de lignes de maxima, prolifère comme a^{-2} . Le squelette de la transformée en ondelettes de la surface Brownienne fractionnaire illustrée dans la figure 2.16a est représenté sur la figure 2.17. À la limite $a \rightarrow 0^+$, cette « forêt » tend à recouvrir tout le plan (x, y) , confirmant que le support des singularités d’un fBm est de dimension $d_F = 2$. La figure 2.17 est donc une illustration visuelle du fait que $B_{1/3}$ n’est dérivable nulle part.

La figure 2.18 représente le comportement de \mathbf{T}_ψ le long de quelques lignes de maxima du squelette de la transformée en ondelettes de la figure 2.17. Pour cela nous avons séparé le module \mathcal{M}_ψ (Fig. 2.18a) de l’argument \mathcal{A}_ψ (Fig. 2.18b). On constate que, d’une ligne de maxima à l’autre, \mathcal{M}_ψ peut avoir un comportement dans les échelles très différent dans la mesure où la gamme d’échelles accessibles à notre analyse est relativement limitée. Cependant lorsque l’on calcule la moyenne des modules \mathcal{M}_ψ à chaque échelle (\bullet), on retrouve bien un comportement en loi de puissance d’exposant $h = 1/3$ (trait interrompu) prédit pour toute ligne pointant sur une singularité isolée d’exposant de Hölder $1/3$. Cela confirme que,

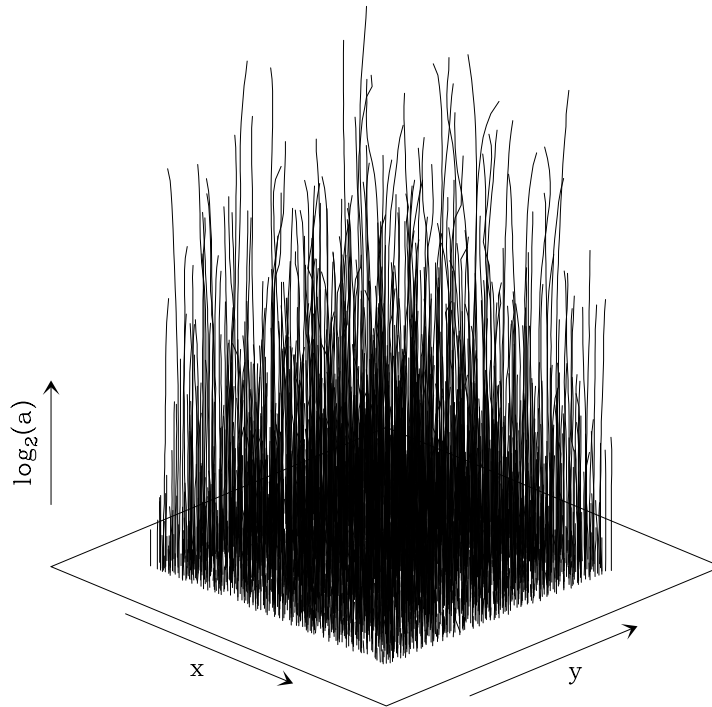


Fig. 2.17 – Squelette de la transformée en ondelette 2D de l'image de la surface Brownienne fractionnaire ($H = 1/3$) représentée dans la figure 2.16a. Ce squelette est composé des lignes de maxima obtenues par chaînage dans les échelles des MMT0. L'ondelette analysatrice est la même que celle utilisée dans la figure 2.16.

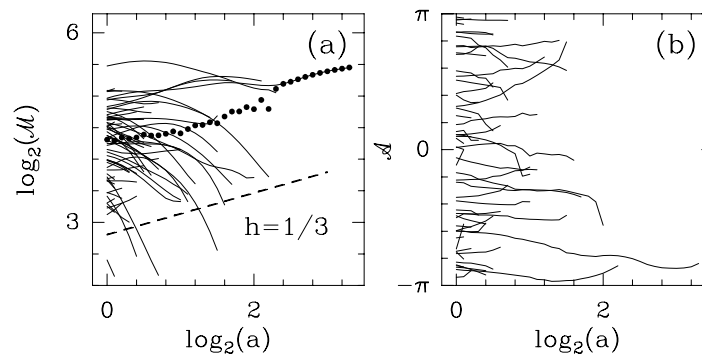


Fig. 2.18 – Comportement du module \mathcal{M}_ψ (a) et de l'argument \mathcal{A}_ψ (b) de \mathbf{T}_ψ le long de quelques lignes de maxima du squelette de la figure 2.17. La moyenne des modules \mathcal{M}_ψ à chaque échelle est représentée par les symboles (\bullet). Le trait interrompu indique la pente $h = H = 1/3$. Les échelles a sont exprimées en unité $\sigma_W (= 13 \text{ pixels})$.

dans le cas des surfaces rugueuses qui possèdent des singularités en tout point, l'estimation locale de l'exposant de Hölder à l'aide du squelette de la transformée en ondelettes est tout à fait inadaptée. En effet, lorsque une ligne de maxima évolue dans les échelles, elle subit l'influence des différentes singularités qui s'accumulent autour du point \mathbf{x}_0 vers lequel elle pointe dans la limite $a \rightarrow 0^+$. Les contributions de plusieurs singularités de forces (dans le cas multifractal), de préfacteurs et de positions différents, entraînent un comportement oscillant voire fluctuant du module \mathcal{M}_ψ le long de chaque ligne de maxima. Cette hiérarchie de singularités conditionne aussi l'échelle d'apparition de ces lignes. Il devient alors très délicat d'extraire du comportement local de \mathcal{M}_ψ le long d'une ligne de maxima une estimation plus ou moins fiable de l'exposant de rugosité local de la surface considérée. De même que plusieurs singularités influent sur le comportement d'une ligne, on peut affirmer que la contribution d'une singularité se répercute sur plusieurs lignes de maxima. Cela confirme qu'une étude globale est nécessaire, afin de pouvoir étudier les contributions statistiques des différentes singularités présentes dans l'image étudiée. Comme nous l'avons signalé plus haut, une moyenne sur les \mathcal{M}_ψ permet de retrouver la valeur attendue $h = H = 1/3$. Cela peut paraître surprenant d'obtenir cette valeur avec une bonne précision alors que beaucoup de lignes présentent une tendance beaucoup plus faible, voire même une tendance croissante lorsque a diminue. Une même observation a été rapportée dans la Réf. [99] lors de l'analyse en ondelettes de réalisations de fBms 1D. Ainsi, en dépit du fait que la gamme d'échelles examinée soit beaucoup trop restreinte, le taux de multiplication des lignes de maxima dans les échelles ($\sim a^{-2}$) combiné à l'évolution et aux fluctuations du préfacteur du module \mathcal{M}_ψ , qui dépend clairement de l'échelle de naissance de la ligne de maxima, permettent de retrouver le comportement théorique sur la moyenne du module sur l'ensemble des lignes de maxima formant le squelette de la transformée en ondelettes. Notons que les lignes croissantes qui apparaissent à petit échelle dans la figure 2.18a, retrouvent sans doute un comportement décroissant à des échelles inférieures à $a = \sigma_W$, échelles qui sont inaccessibles à la résolution de notre microscope mathématique.

Intéressons nous maintenant au comportement de \mathcal{A}_ψ dans les échelles (Fig. 2.18b). Une inspection de l'ensemble des lignes de maxima indique l'absence de directions privilégiées vers lesquelles convergeraient de façon préférentielle \mathcal{A}_ψ le long des lignes de maxima dans la limite $a \rightarrow 0^+$. De plus, on constate que, pour une ligne de maxima donnée, \mathcal{A}_ψ semble suivre un début de marche aléatoire susceptible de parcourir l'intervalle $[0, 2\pi]$ si notre étude nous avait permis d'examiner une gamme d'échelle plus grande. Afin de nous convaincre de cette marche aléatoire, nous avons représenté, dans la figure 2.19, l'évolution de \mathbf{T}_ψ le long de diverses lignes de maxima. Chaque point dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) correspond aux coordonnées cartésiennes du vecteur gradient \mathbf{T}_ψ associé à un MMMTO. On constate que chaque trajectoire est torturée mais de longueur limitée. À la vue de leur positionnement respectif autour de l'origine, on réalise que l'isotropie locale semble être présente. Toutefois sa mise en évidence sur une trajectoire nécessiterait l'analyse d'une gamme d'échelles beaucoup plus importante. On peut faire la même observation sur la figure 2.19b, où sont reportés les résultats obtenus pour l'étude d'une image de surface fBm d'index $H = 2/3$. On constate cependant que les trajectoires sont moins torturées (signature que la surface est moins rugueuse) et qu'une gamme d'échelles encore plus

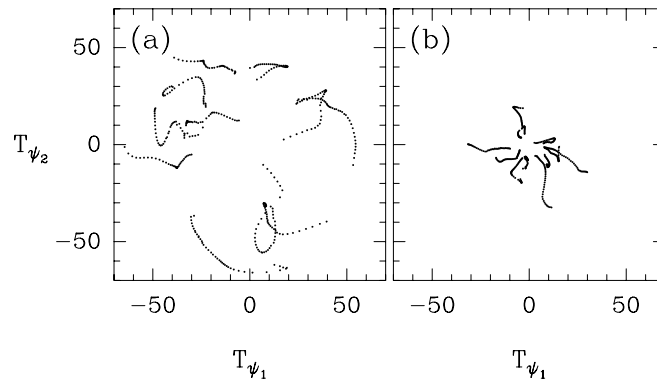


Fig. 2.19 – Évolution de \mathbf{T}_ψ associé aux MMTMO le long de quelques lignes de maxima sélectionnées dans le squelette de la transformée en ondelettes illustrée dans la figure 2.17. \mathbf{T}_ψ est représenté dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) . (a) $B_{H=1/3}$; (b) $B_{H=2/3}$. L'ondelette analytique est l'ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ utilisée dans la figure 2.16.

importante serait nécessaire pour mettre en évidence l'isotropie des propriétés d'invariance d'échelle locales de cette surface.

La figure 2.20 présente les résultats du calcul des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ à l'aide de la méthode MMTO 2D présentée dans la section 2.4. Ces courbes ont été obtenues par moyenne recuite sur les squelettes des transformées en ondelettes de 32 images (1024×1024) de surfaces Browniennes $B_{1/3}$. La fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ (Éq. (2.59)) est représentée en échelles logarithmiques dans la figure 2.20a pour différentes valeurs de q . Quelle que soit la valeur de $q \in [-4, 6]$, ces données présentent un comportement linéaire bien défini sur environ 3 octaves, et sont en parfait accord avec la prédiction théorique (2.80) pour les exposants $\tau(q) = qH - 2$. Les spectres $\tau(q)$ obtenus par régression linéaire des $\log_2(\mathcal{Z}(q, a))$ en fonction de $\log_2 a$, pour trois valeurs de $H = 1/3, 1/2$ et $2/3$, sont représentés dans la figure 2.20c. Sur la gamme de valeurs de $q \in [-4, 6]$, $\tau(q)$ suit un comportement linéaire parfait ce qui apporte la preuve expérimentale de la monofractalité des surfaces étudiées. On constate toutefois que la mesure de la pente des droites ainsi obtenues conduit à une légère sous-estimation de la valeur de l'exposant de Hurst H , sous-estimation qui a déjà été remarquée lors de l'analyse de fBms 1D [46–48, 173]. Un des points délicats de la régression linéaire est en effet de choisir convenablement l'intervalle d'échelles sur lequel on estime l'exposant $\tau(q)$. D'après l'étude théorique d'Audit *et al* [173], on obtient une meilleure estimation des exposants $\tau(q)$ avec la méthode MMTO 1D, lorsque l'on décale vers les petites échelles la zone où l'on effectue la régression linéaire. Ces résultats théoriques démontrés en 1D semblent parfaitement s'appliquer en 2D comme l'illustre la figure 2.20b où $h(q, a)$ (Éq. (2.66)) est représenté en fonction de $\log_2 a$. En effet, quelle que soit la valeur de q , les données sont plus proches de la prédiction théorique $h(q, a) \sim aH$ (trait plein) aux petites échelles qu'aux grandes échelles où clairement les données semblent dévier des droites théoriques. Ainsi, comme le montre la figure 2.21, une régression linéaire de $h(q, a)$ sur une gamme d'échelles de plus en plus importante conduit à une sous-estimation de plus en plus

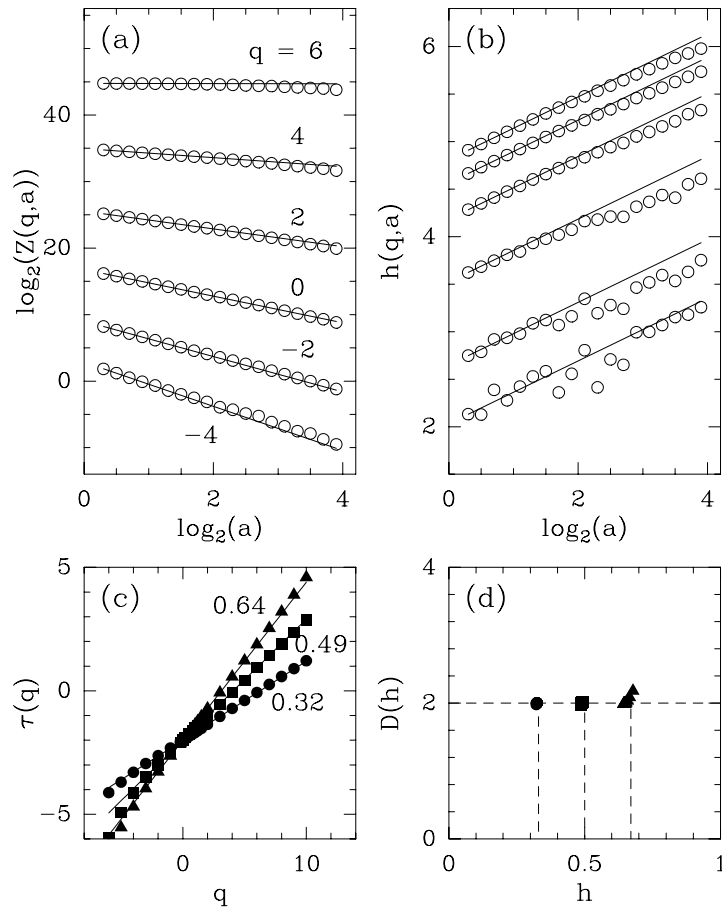


Fig. 2.20 – Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de surfaces Browniennes fractionnaires 2D par la méthode MMTO 2D. (a) $\log_2 \mathcal{Z}(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$; les droites en trait plein correspondent aux prédictions théoriques $\tau(q) = qH - 2$ (Éq. (2.80)) pour $H = 1/3$. (b) $h(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$; les droites en trait plein correspondent aux prédictions théoriques $h(q, a) = Ha$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q pour $H = 1/3$ (\bullet), $1/2$ (\blacksquare) et $2/3$ (\blacktriangle); les droites en trait plein correspondent à l'estimation de H par régression linéaire. (d) $D(h)$ en fonction de h obtenu via l'estimation de $h(q)$ (Éq. (2.68)) et de $D(q)$ (Éq. (2.69)); les symboles ont la même signification que dans (c). L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ utilisée dans la figure 2.16. Ces résultats correspondent à une moyenne recuite sur 32 images (1024×1024) de B_H . Les échelles a sont exprimées en unité σ_W .

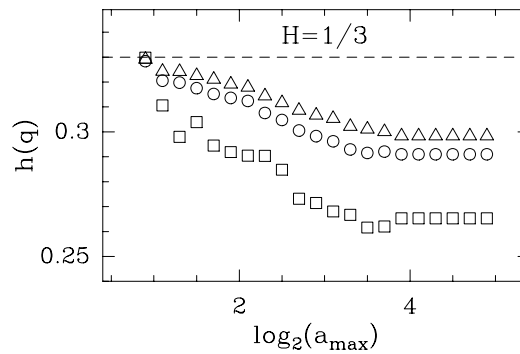


Fig. 2.21 – Détermination de l'exposant $h(q)$ (Éq. (2.68)) par régression linéaire de $h(q, a)$ (Éq. (2.66)) sur un intervalle d'échelles $1 \leq a \leq a_{\max}$ pour plusieurs valeurs de a_{\max} . La droite correspondant à $h(q) = H = 1/3$ est représentée en trait interrompu. Les valeurs de q sont -2 (\square), 0 (\circ) et 2 (\triangle). Même procédure de calcul que dans la figure 2.20. Les échelles a sont exprimées en unité σ_W .

prononcée de l'exposant de Hurst H . La figure 2.20d représente le spectre $D(h)$ calculé à partir des valeurs $h(q)$ (Éq. (2.68)) et $D(q)$ (Éq. (2.69)) obtenues par régression linéaire sur la première octave de la gamme d'échelles utilisée pour notre analyse. Pour les valeurs de q considérées ($q \in [-4, 6]$), quel que soit l'index H de la surface ($1/3, 1/2$ et $2/3$), le spectre des singularités obtenu se réduit à un point $D(h = H) = 2 \pm 0.02$. Ainsi les spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ mesurés sont en parfait accord avec les prédictions théoriques données respectivement par les équations (2.80) et (2.79). Cette application aux surfaces Browniennes fractionnaires montre que la méthode MMT0 2D est une technique fiable et efficace pour l'analyse des surfaces rugueuses homogènes présentant des propriétés d'invariance d'échelle isotropes.

En conclusion de cette sous-section, voici quelques remarques à propos des problèmes cruciaux de taille finie et de convergence statistique. La figure 2.22 représente l'évolution de l'estimation de $h(q)$ lorsque l'on augmente la taille des images analysées. Cette mesure a été effectuée sur 32 images de taille $(N \times N)$ dont on a gardé uniquement les données pour la partie centrale de taille $(N/2 \times N/2)$ qui ne sont pas polluées par les effets de bords. On constate que pour la plage des valeurs de q considérées, l'estimation de $h(q)$ est acceptable à partir de $N = 512$. En ce qui concerne la convergence statistique, la figure 2.23 représente l'évolution de l'estimation de $h(q)$ en fonction du nombre N_I d'images (1024×1024) . On constate qu'afin de pouvoir mesurer correctement les spectres $\tau(q)$ et $D(h)$, il est nécessaire de disposer d'au moins une trentaine d'images (1024×1024) . Notons que l'accès à des valeurs de $|q|$ importantes nécessite d'augmenter de façon significative le nombre d'images analysées. Dans le cas des surfaces Browniennes fractionnaires, 32 images de taille (1024×1024) suffisent pour approcher avec une bonne précision les prédictions théoriques pour $q \in [-4, 6]$. Cette affirmation sera confirmée à la fin de la sous-section suivante.

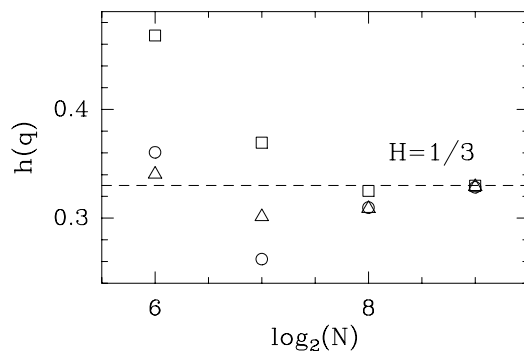


Fig. 2.22 – Détermination de l'exposant $h(q)$ (Éq. (2.68)) par régression linéaire de $h(q, a)$ (Éq. (2.66)) sur un intervalle d'échelles $1 \leq a \leq 2$ pour 32 images dont la partie centrale analysée est de taille $(N \times N)$. La droite correspondant à $h(q) = H = 1/3$ est représentée en trait interrompu. Les valeurs de q sont -2 (\square), 0 (\circ) et 2 (\triangle). Même procédure de calcul que dans la figure 2.20. Les échelles a sont exprimées en unité σ_W .

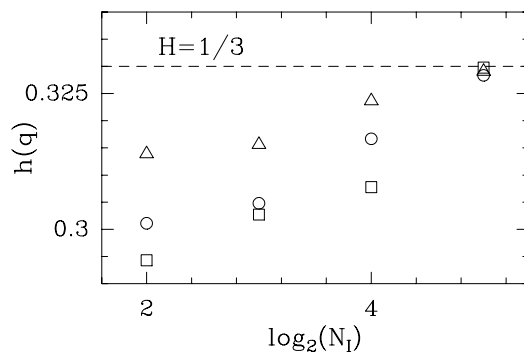


Fig. 2.23 – Détermination de l'exposant $h(q)$ (Éq. (2.68)) par régression linéaire de $h(q, a)$ (Éq. (2.66)) sur un intervalle d'échelles $1 \leq a \leq 2$ pour N_I images (1024×1024). La droite correspondant à $h(q) = H = 1/3$ est représentée en trait interrompu. Les valeurs de q sont -2 (\square), 0 (\circ) et 2 (\triangle). Même procédure de calcul que dans la figure 2.20. Les échelles a sont exprimées en unité σ_W .

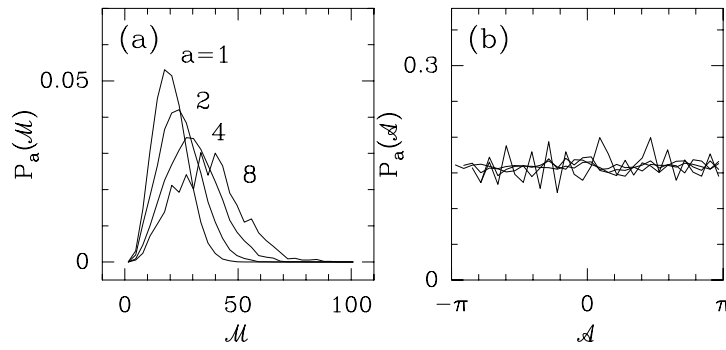


Fig. 2.24 – Pdfs des coordonnées polaires du vecteur gradient associé aux MMMTO de 32 images (1024×1024) de $B_{1/3}$, pour les échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M} . (b) $P_a(\mathcal{A})$ en fonction de \mathcal{A} . ψ est l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ illustrée dans les figures 2.1a et 2.1b.

2.5.3 Densités de probabilité

Cette section est consacrée à l'étude de la pdf $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ du vecteur gradient associé aux MMMTO qui composent les squelettes des transformées en ondelettes de 32 images (1024×1024) de $B_{1/3}$. Les résultats qui sont présentés ici pour $H = 1/3$, sont tout à fait représentatifs des résultats obtenus pour d'autres valeurs de l'index H . La figure 2.24 représente les pdfs $P_a(\mathcal{M}) = \int d\mathcal{A} P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $P_a(\mathcal{A}) = \int d\mathcal{M} P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ pour quatre échelles différentes. Sur la figure 2.24a, $P_a(\mathcal{M})$ présente une décroissance rapide à 0 pour $\mathcal{M} \rightarrow 0^+$. Ce comportement résulte essentiellement de deux facteurs. D'une part \mathcal{M}_ψ^2 est le carré du module de $\mathbf{T}_\psi = (T_{\psi_1}, T_{\psi_2})$, c'est-à-dire qu'il est la somme des carrés de T_{ψ_1} et de T_{ψ_2} (Éq. (2.20)). Ainsi, pour que \mathcal{M}_ψ soit nul, il faut que T_{ψ_1} et T_{ψ_2} soient nuls simultanément. D'autre part les MMMTO qui constituent le squelette de la transformée en ondelettes, sont les maxima le long des chaînes de maxima qui par définition sont composées des maxima du module dans la direction du gradient. Ainsi, les MMMTO considérés présentent un module \mathcal{M}_ψ qui est le maximum d'une variable qui elle-même est déjà rarement nulle. Cette constatation est au cœur de la méthode MMT0 2D, car la décroissance rapide à 0 de $P_a(\mathcal{M})$ pour $\mathcal{M} \rightarrow 0^+$ permet le calcul de la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ pour les valeurs de q négatives, valeurs qui sont inaccessibles à la technique des fonctions de structure [46,48,49]. La pdf $P_a(\mathcal{A})$ des angles (Fig. 2.24b) ne présente aucune évolution significative dans les échelles. Malgré la présence de fluctuations plus marquées aux plus grandes échelles due à un manque progressif de statistique, ces pdfs sont plates : $P_a(\mathcal{A}) = 1/2\pi$, indépendamment de \mathcal{A} . Ces résultats apportent la preuve de l'isotropie statistique à toute échelle des surfaces étudiées. Non seulement les résultats présentés dans les figures 2.25 et 2.26 confirment cette isotropie statistique mais de plus ils apportent la démonstration de l'indépendance statistique de \mathcal{M}_ψ et \mathcal{A}_ψ . La symétrie radiale observée dans la représentation de $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) dans la figure 2.25, est caractéristique d'une surface qui ne possède aucune direction privilégiée aux échelles examinées. Cette symétrie présente à toutes les échelles est aussi la preuve que la pdf des gradients factorise $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = P_a(\mathcal{M})P_a(\mathcal{A})$

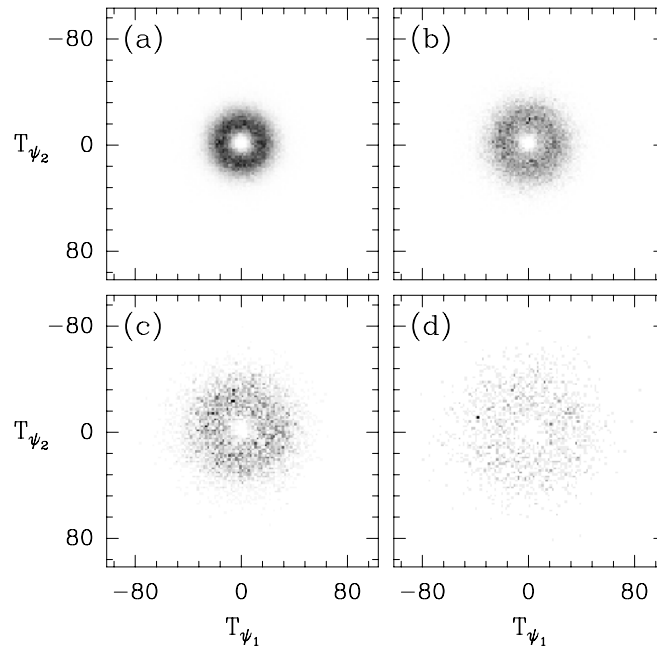


Fig. 2.25 – Représentation dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) de la distribution du vecteur gradient associé aux MMMTO de $B_{1/3}$ pour les échelles $a = \sigma_W$ (a), $2\sigma_W$ (b), $4\sigma_W$ (c) et $8\sigma_W$ (d). Mêmes conditions de calcul que dans la figure 2.24.

(Éq. (2.71)). La figure 2.26 apporte une confirmation quantitative de l'indépendance statistique de \mathcal{M}_ψ et \mathcal{A}_ψ . En effet, quelle que soit l'échelle considérée, les pdfs $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ en fonction de \mathcal{M} obtenues pour différentes valeurs de l'angle \mathcal{A} , se superposent parfaitement confirmant par là le fait que les propriétés d'invariance d'échelle sont entièrement contenues dans l'évolution de la forme de $P_a(\mathcal{M})$ à travers les échelles.

La dépendance dans les échelles de $P_a(\mathcal{M})$ est illustrée dans la figure 2.27a dans une représentation semi-logarithmique. Sur la figure 2.27b ces mêmes pdfs sont représentées après avoir divisé \mathcal{M} par a^H . On constate que, indépendamment de l'échelle a , les courbes désormais se superposent remarquablement, confirmant par là le fait que \mathcal{M} se comporte bien statistiquement comme $\mathcal{M}_\psi \sim a^H$. Les résultats reportés dans la figure 2.27 peuvent être formalisés par la relation suivante :

$$P(\mathcal{M}_\psi[B_H](\mathcal{L}(a))) = \mathbb{P}(\mathcal{M}_\psi[B_H](\mathcal{L}(a))/a^H), \quad (2.83)$$

où \mathbb{P} est une fonction indépendante du paramètre d'échelle a . Ce comportement universel se retrouve sur les pdfs des coordonnées cartésiennes du vecteur gradient associé aux MMMTO. La figure 2.28 représente ces pdfs (en représentation semi-logarithmique) après dilatation de T_{ψ_1} et T_{ψ_2} par un facteur a^H . Le fait que les deux « coordonnées » T_{ψ_1} (Fig. 2.28a) et T_{ψ_2} (Fig. 2.28b) suivent des lois d'échelle de même exposant que \mathcal{M}_ψ , confirme l'absence de direction privilégiée dans le comportement de \mathbf{T}_ψ à travers les échelles.

Pour conclure cette sous-section, il est important de revenir quelques instants sur le problème de la convergence statistique des calculs des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$, c'est-à-dire

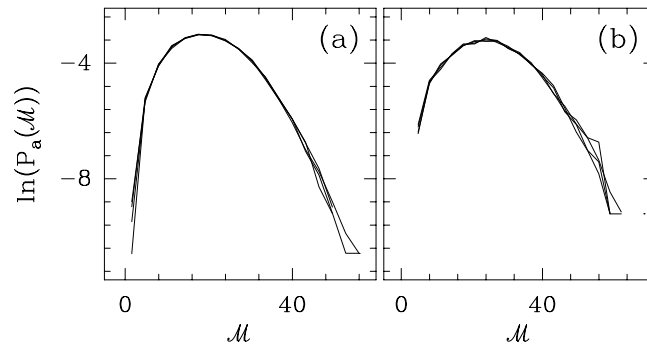


Fig. 2.26 – Pdf du module \mathcal{M}_ψ des MMMTO de $B_{1/3}$ conditionnée par la valeur de l'argument \mathcal{A} . (a) $a = \sigma_W$; (b) $a = 2\sigma_W$. Les différentes courbes correspondent aux valeurs suivantes de $\mathcal{A} \pmod{\pi}$: $0 \pm \pi/8$, $\pi/4 \pm \pi/8$, $\pi/2 \pm \pi/8$ et $3\pi/4 \pm \pi/8$. Mêmes conditions de calcul que dans la figure 2.24.

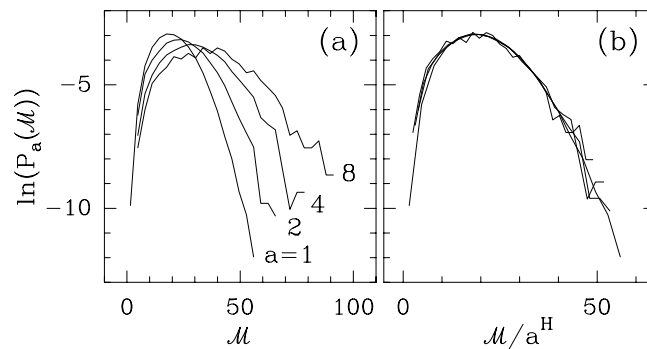


Fig. 2.27 – Pdfs du module \mathcal{M}_ψ des MMMTO de $B_{1/3}$ pour les échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de \mathcal{M} . (b) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de \mathcal{M}/a^H avec $H = 1/3$. Mêmes conditions de calcul que dans la figure 2.24.

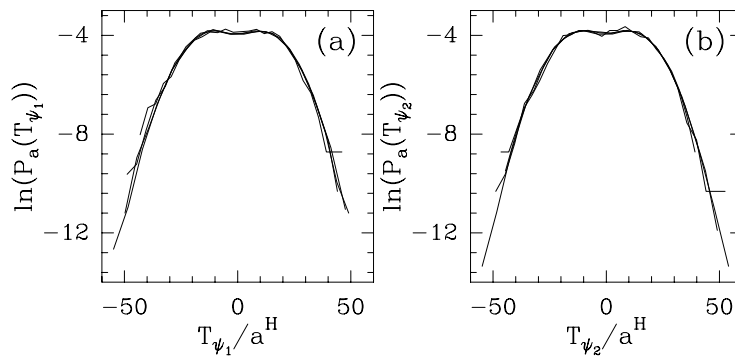


Fig. 2.28 – Pdfs des coordonnées cartésiennes du vecteur gradient associé aux MMMTO de $B_{1/3}$ pour les échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $\ln(P_a(T_{\psi_1}))$ en fonction de T_{ψ_1}/a^H ; (b) $\ln(P_a(T_{\psi_2}))$ en fonction de T_{ψ_2}/a^H , avec $H = 1/3$. Mêmes conditions de calcul que dans la figure 2.24.

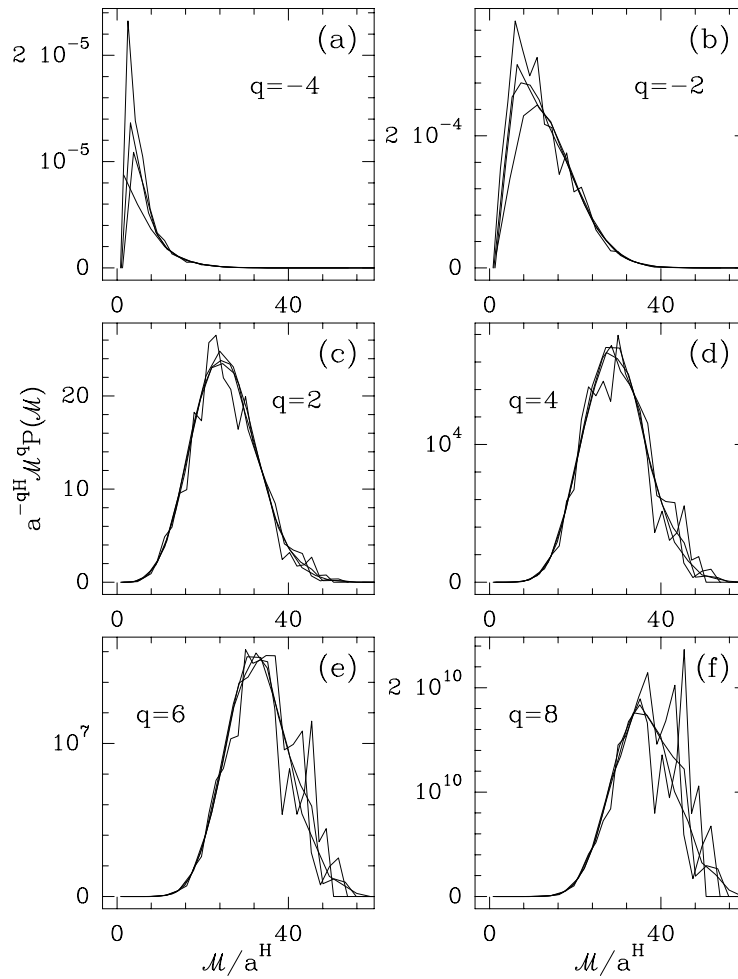


Fig. 2.29 – Pdfs du module \mathcal{M}_ψ des MMMTO de $B_{1/3}$ pour les échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. $a^{-qH}\mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M}/a^H pour $q = -4$ (a), -2 (b), 2 (c), 4 (d), 6 (e) et 8 (f). Mêmes conditions de calcul que dans la figure 2.24.

sur le problème de convergence statistique de la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$. D'après l'équation (2.70), $\mathcal{Z}(q, a)$ est proportionnelle à l'intégrale de $\mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M})$. La relation d'auto-similarité (2.83) permet de prédire le comportement suivant :

$$a^{-qH}\mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M}) = \mathbb{F}_q(\mathcal{M}/a^H), \quad (2.84)$$

où \mathbb{F}_q est une fonction qui dépend de q , mais qui est indépendante de l'échelle a . La figure 2.29 confirme la pertinence de cette relation pour plusieurs valeurs de q comprises entre -4 et $+8$. Les courbes obtenues en représentant $a^{-qH}\mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M}/a^H , pour différentes valeurs de l'échelle a , se superposent parfaitement sur une courbe unique bien définie qui ne dépend que de q . Pour les valeurs de $|q|$ importantes, on constate que les distributions sont de plus en plus bruitées, rendant de plus en plus délicate l'estimation de leur intégrale. Par conséquent le calcul de $\mathcal{Z}(q, a)$ perd de sa précision principalement et en

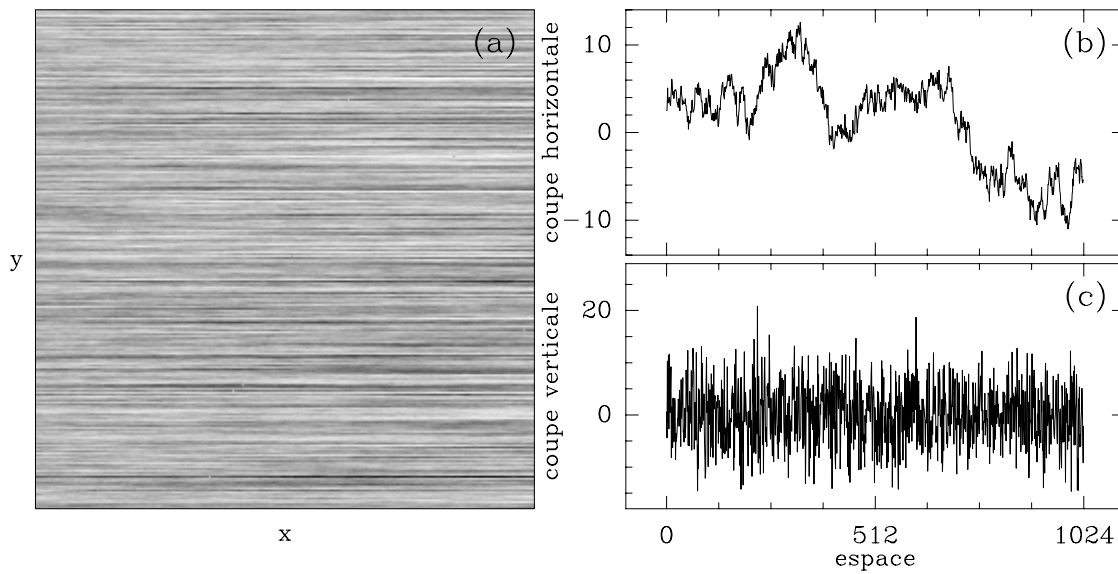


Fig. 2.30 – Surface rugueuse autoaffine anisotrope obtenue en superposant (suivant l’axe des y) des réalisations de signaux fBm 1D d’index $H_x = H = 1/3$. (a) Une image (1024×1024) d’une telle surface codée du blanc (min) au noir (max). (b) Profil d’une coupe le long de l’axe des x . (c) Profil d’une coupe le long de l’axe des y .

premier lieu aux grandes échelles où les lignes de maxima sont beaucoup moins nombreuses. Les résultats présentés dans la figure 2.29 montrent de façon convaincante que l’estimation des spectres $\tau(q)$ et de $D(h)$ par la méthode MMTO 2D ne souffrent d’aucun problème de convergence statistique dans la mesure où, pour le nombre d’images (1024×1024) analysées, on se limite à des valeurs de q comprises dans l’intervalle $[-3, 6]$ pour les échelles considérées.

2.6 Application de la méthode MMTO 2D à des surfaces rugueuses autoaffines anisotropes

D’après leur définition dans la section 2.5, les surfaces Browniennes 2D isotropes ne constituent pas un modèle suffisamment général pour la plupart des surfaces rugueuses observées naturellement ou expérimentalement [2, 3, 5–20, 72, 73]. Une contrainte importante imposée par ce modèle est l’isotropie qui semble être une vision plutôt idéaliste du concept de rugosité et de ses évidences expérimentales [2, 3, 6, 7, 9, 72–74, 79, 130–133, 175]. Un inconvénient de nature beaucoup plus fondamentale est le fait qu’un seul paramètre, l’exposant de Hurst H , suffise à caractériser les propriétés d’invariance d’échelle des surfaces Browniennes fractionnaires. Celles-ci se révèlent donc totalement inadaptées pour rendre compte de probables fluctuations de rugosité comme on peut généralement s’y attendre dans des situations expérimentales. Le chapitre 3 sera consacré à l’analyse de telles surfaces rugueuses

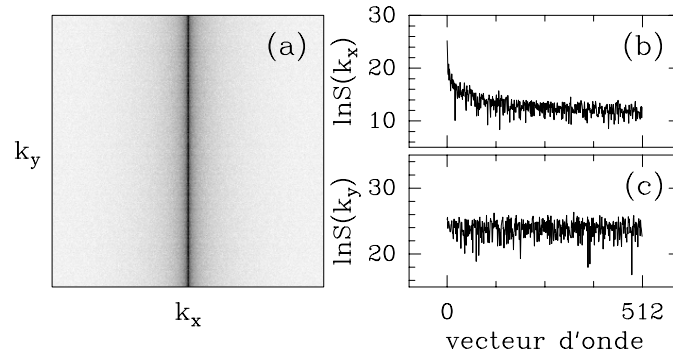


Fig. 2.31 – Analyse spectrale d’une image (1024×1024) de surface rugueuse autoaffine anisotrope (Fig. 2.30a). (a) $\ln S(k_x, k_y)$ codée du blanc (min) au noir (max). (b) $\ln S(k_x, k_y)$ en fonction de k_x à k_y fixé. (c) $\ln S(k_x, k_y)$ en fonction de k_y à k_x fixé.

multifractales [120, 122, 129]. Nous abordons dans cette section l’étude des propriétés d’invariance d’échelle de surfaces rugueuses autoaffines anisotropes [72–74, 79, 130–133].

Un moyen naturel d’introduire de l’anisotropie dans la transformée de Fourier d’une surface est d’effectuer des intégrations fractionnaires d’ordres différents suivant deux directions orthogonales [176]. La figure 2.30a représente une image (1024×1024) d’une surface rugueuse obtenue en superposant suivant l’axe des y des réalisations de signaux fBm 1D d’index $H_x = H = 1/3$ (Fig. 2.30b). Ainsi, la direction y modélise une sorte de bruit blanc (Fig. 2.30c), dont l’exposant de rugosité est $H_y = -1/2$. Les résultats de l’analyse spectrale de cette image sont rapportés dans la figure 2.31. On constate que la densité spectrale présente une forte anisotropie :

$$S(k_x, k_y) \sim \begin{cases} k_x^{-(2H_x+1)}, & \forall k_y \\ k_y^{-(2H_y+1)}, & \forall k_x \end{cases} \quad (2.85)$$

c’est-à-dire que l’exposant spectral est différent suivant l’axe des x , $\beta_x = 2H_x + 1 = 5/3$, et suivant l’axe des y , $\beta_y = 2H_y + 1 = 0$.

2.6.1 Calcul numérique des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$

Cette sous-section est consacrée à l’analyse avec la méthode MMTO 2D de surfaces autoaffines anisotropes du type de celle représentée dans la figure 2.30a. À cette fin, nous avons calculé les squelettes des transformées en ondelettes de 32 réalisations (1024×1024) de telles surfaces avec l’ondelette analysatrice isotrope d’ordre $n_\psi = 1$ illustrée dans les figures 2.1a et 2.1b. La figure 2.32 représente les chaînes de maxima et les MMMTO obtenus à différentes échelles pour l’une de ces images. On remarque sur cette figure que les chaînes de maxima se positionnent horizontalement et que le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ associé aux MMMTO (\bullet) pointe majoritairement dans la direction de l’axe des y ($\mathcal{A}_\psi = \pm\pi/2$). Cette constatation est de plus en plus évidente lorsque l’on descend dans les échelles. Dans

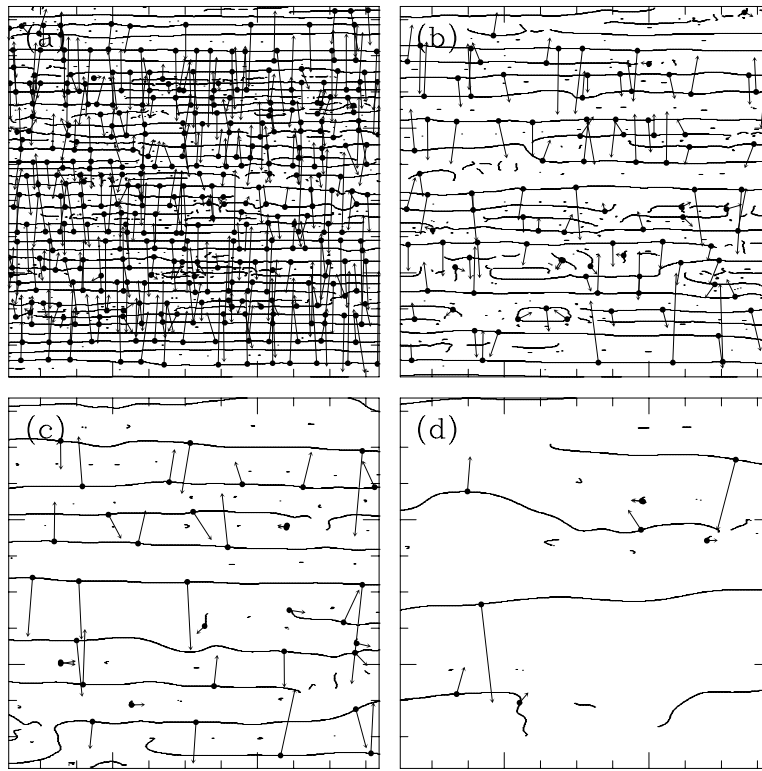


Fig. 2.32 – Analyse par transformée en ondelettes 2D de l’image (1024×1024) de la surface rugueuse anisotrope présentée dans la figure 2.30a. ψ est l’ondelette analysatrice isotrope d’ordre $n_\psi = 1$ illustrée dans les figures 2.1a et 2.1b. Chaînes de maxima (trait plein) calculées aux échelles suivantes : $a = \sigma_W$ (a), $2\sigma_W$ (b), $4\sigma_W$ (c) et $8\sigma_W$ (d). Les flèches représentent le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ aux MMMTO (\bullet).

la limite $a \rightarrow 0^+$, le nombre de MMMTO se multiplie comme a^2 , recouvrant progressivement la totalité de la surface analysée, preuve que cette surface est singulière en chacun de ses points. L’analyse locale des propriétés d’invariance d’échelle de cette surface est rapportée dans la figure 2.33. Même si cela est moins prononcé, on constate, comme dans le cas des surfaces de surfaces Browniennes fractionnaires, que l’évolution du module \mathcal{M}_ψ dans les échelles fluctue d’une ligne de maxima à l’autre (Fig. 2.33a). Toutefois, sur quasiment toutes les lignes, le module croît depuis les grandes vers les petites échelles, ce qui suggère que la majorité des singularités concernées par ces lignes présentent des exposants de Hölder négatifs. Cette observation est confirmée par le calcul de la moyenne de \mathcal{M}_ψ (\bullet) sur l’ensemble des lignes de maxima représentées dans la figure 2.33 :

$$\langle \mathcal{M} \rangle_{\mathcal{L}(a)} \sim a^{H_y} \sim a^{-1/2}. \quad (2.86)$$

La figure 2.33b révèle la convergence de l’argument \mathcal{A}_ψ vers $\pm\pi/2$ quelle que soit la ligne de maxima considérée. Cette figure souligne, non seulement l’existence d’une anisotropie locale, dans le sens où l’évolution de \mathcal{A}_ψ le long d’une ligne tend vers une valeur bien

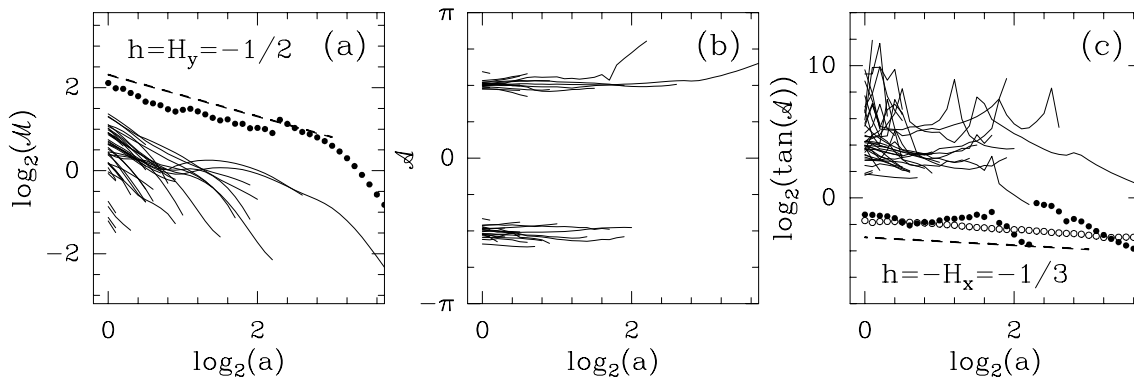


Fig. 2.33 – Comportement du module \mathcal{M}_ψ (a) et de l'argument \mathcal{A}_ψ (b) de \mathbf{T}_ψ le long de quelques lignes de maxima du squelette de la transformée en ondelette de l'image représentée dans la figure 2.30a. (c) $\tan(\mathcal{A}_\psi)$ en fonction de a en échelles logarithmiques. Les symboles (\bullet) correspondent à la moyenne de \mathcal{M}_ψ et de \mathcal{A}_ψ (c) sur ces lignes. La moyenne de \mathcal{A}_ψ sur les squelettes des 32 images est représentée par les symboles (\circ). Dans un souci de clarté nous avons décalé verticalement les points de ces moyennes. Les traits interrompus indiquent les pentes $h = H_y = -1/2$ (a) et $-H_x = -1/3$ (c). Les échelles a sont exprimées en unité σ_W .

précise, mais surtout elle met en évidence l'existence d'une anisotropie globale, dans le sens où suivant toutes les lignes de maxima \mathcal{A}_ψ converge vers le même angle limite (à π près). La figure 2.33c tente de quantifier cette convergence. Bien que l'évolution de $\tan(\mathcal{A}_\psi)$ le long de chaque ligne de maxima en échelles logarithmiques présente une tendance croissante depuis les grandes vers les petites échelles, il est assez difficile d'effectuer une estimation quantitative de cette divergence. Cependant si nous examinons maintenant la moyenne de \mathcal{A}_ψ (\bullet) sur toutes ces lignes maxima, il devient tout à fait convaincant de proposer un comportement statistique en loi de puissance de cette divergence :

$$\tan(\langle \mathcal{A} \rangle_{\mathcal{L}(a)}) \sim a^{-H_x} \sim a^{-1/3}. \quad (2.87)$$

Ainsi à partir du comportement dans les échelles des moyennes de \mathcal{M}_ψ et de \mathcal{A}_ψ le long des lignes de maxima, il est possible de mesurer les deux exposants $H_y < H_x$ qui caractérisent les propriétés d'invariance d'échelle anisotropes des surfaces rugueuses considérées. Le comportement de la moyenne de \mathcal{M}_ψ donne accès à l'exposant de Hölder $h = \min(H_x, H_y) = H_y$. Le comportement de la moyenne de \mathcal{A}_ψ contient l'information sur le deuxième exposant $H = \max(H_x, H_y) = H_x$ ($= h/\alpha$ suivant les notations utilisées dans les équations (2.36) et (2.37)).

La figure 2.34 présente les résultats des calculs des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ par la méthode MMTO 2D présentée dans la section 2.4. Ces résultats ont été obtenus par moyenne recuite sur les squelettes des transformées en ondelettes de 32 images (1024×1024). La fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ (Éq. (2.59)) est représentée dans la figure 2.34a en échelles logarithmiques, pour différentes valeurs de q . Ces données présentent un comportement linéaire bien établi pour les échelles $2^{1/2}\sigma_W \leq a \leq 2^3\sigma_W$. Le spectre $\tau(q)$ obtenu par régression linéaire de

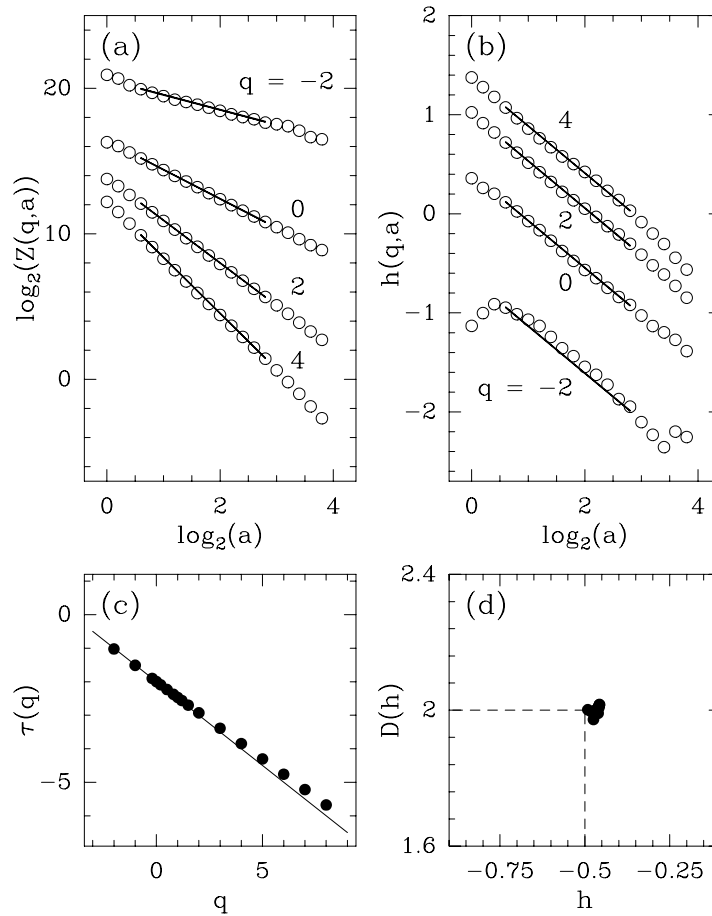


Fig. 2.34 – Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de surfaces rugueuses autoaffines anisotropes par la méthode MMT0 2D. (a) $\log_2 Z(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$. (b) $h(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q , obtenu à partir des régressions linéaires illustrées sur la figure (a). (d) $D(h)$ en fonction de h , obtenu via l'estimation de $h(q)$ (Éq. (2.68)) et de $D(q)$ (Éq. (2.69)). L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ utilisée dans la figure 2.32. Ces résultats correspondent à une moyenne recuite sur 32 images (1024×1024) telle que celle représentée dans la figure 2.30a. Les échelles a sont exprimées en unité σ_W . La droite en trait plein dans (c) correspond au spectre théorique $\tau(q) = qH_y - 2 = -q/2 - 2$.

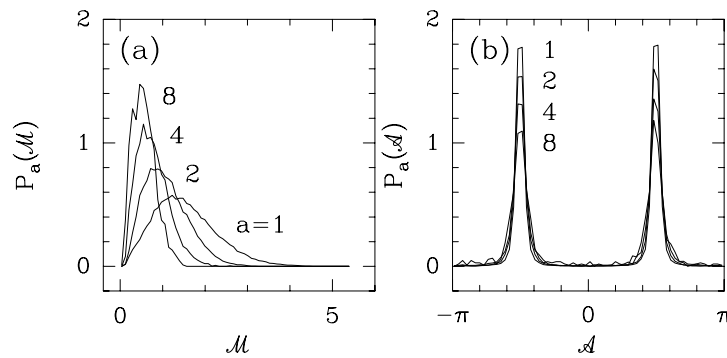


Fig. 2.35 – Pdfs des coordonnées polaires du vecteur gradient associé aux MMMTO de 32 images (1024×1024) de surfaces autoaffines anisotropes du type de celle représentée dans la figure 2.30a, pour les échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M} . (b) $P_a(\mathcal{A})$ en fonction de \mathcal{A} . L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ utilisée dans la figure 2.34.

$\log_2 \mathcal{Z}(q, a)$ sur cet intervalle d'échelles est représenté sur la figure 2.34c. Pour q compris entre -2 et 2 , les données se positionnent avec une remarquable précision sur une droite de pente $H_y = -1/2$. La droite en trait plein dans la figure 2.34c correspond à la prédiction théorique du spectre pour une surface rugueuse autoaffine homogène anisotrope d'exposant de Hölder unique $h = \min(H_x, H_y) = H_y = -1/2$, c'est-à-dire $\tau(q) = -q/2 - 2$. Pour $q > 2$, les données s'écartent légèrement de cette prédiction pour des raisons d'effets de taille finie et de convergence statistique. Remarquons, cependant, qu'une régression linéaire des points expérimentaux reste tout à fait raisonnable pour $-2 \leq q \leq 8$, et conduit à une pente $h = -0.48 \pm 0.02$. Ce résultat est confirmé par l'application de la procédure de régression linéaire à $h(q, a)$ (Fig. 2.34b), qui fournit, toujours pour $q \in [-2, 8]$, une valeur $h(q) = -0.48 \pm 0.02$, indépendante de q . Ainsi le calcul du spectre des singularités $D(h)$ via l'estimation des exposants $h(q)$ (Éq. (2.68)) et $D(q)$ (Éq. (2.69)) confirme que celui-ci se réduit à un seul point $D(h = -0.48 \pm 0.02) = 2 \pm 0.2$ ($D(h) = -\infty$ pour les autres valeurs de h). Ces résultats confirment que la méthode MMTO 2D permet d'extraire avec efficacité et précision les propriétés d'invariance d'échelle anisotropes et homogènes (monofractales) des surfaces rugueuses autoaffines.

2.6.2 Densités de probabilité

La figure 2.35 représente les pdfs des coordonnées polaires (\mathcal{M}_ψ et \mathcal{A}_ψ) de \mathbf{T}_ψ calculées à partir des squelettes des transformées en ondelettes de 32 images (1024×1024) de surfaces rugueuses autoaffines anisotropes du type de celle représentée dans la figure 2.30a. On constate que, contrairement aux surfaces Browniennes fractionnaires (Fig. 2.24a), $P_a(\mathcal{M})$ s'étale et s'élargit lorsque l'on descend dans les échelles (Fig. 2.35a). Ce comportement est significatif de la présence dans la surface de singularités d'exposant de Hölder négatif ($\mathcal{M}_\psi \sim a^h$). On retrouve la forte anisotropie de la surface dans la forme « piquée » en

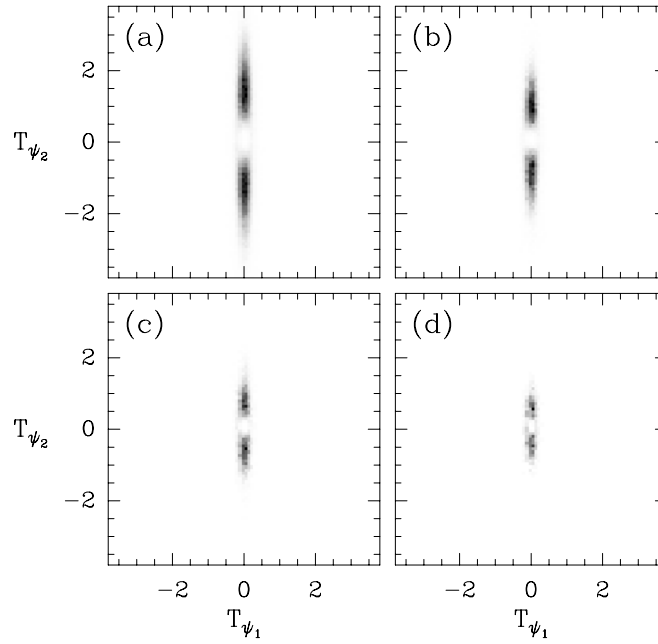


Fig. 2.36 – Représentation dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) de la distribution du vecteur gradient associé aux MMMTO pour les échelles $a = \sigma_W$ (a), $2\sigma_W$ (b), $4\sigma_W$ (c) et $8\sigma_W$ (d). Mêmes conditions de calcul que dans la figure 2.34.

$\pm\pi/2$ des pdfs de l'argument \mathcal{A}_ψ (Fig. 2.35b), ainsi que dans la forme oblongue de la distribution du vecteur gradient \mathbf{T}_ψ aux MMMTO dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) (Fig. 2.36). Cette anisotropie de plus en plus prononcée dans la direction y lorsque l'on descend dans les échelles, est la signature de l'existence de deux exposants différents suivant les directions x et y . Ces exposants sont mis en évidence dans la figure 2.37 où nous avons séparé les comportements suivant chaque direction, en représentant en échelles semi-logarithmiques et pour plusieurs échelles, les pdfs de $T_{\psi_1}/a^{H-1/2}$ (Fig. 2.37a) et de $T_{\psi_2}/a^{-1/2}$ (Fig. 2.37b) où $H = H_x = 1/3$. On constate, aussi bien pour T_{ψ_1} que pour T_{ψ_2} , que les courbes obtenues aux différentes échelles examinées se remettent remarquablement sur une même courbe suivant les relations :

$$P\left(T_{\psi_1}[f](\mathcal{L}(a))\right) = \mathbb{P}_1\left(T_{\psi_1}[f](\mathcal{L}(a))/a^{H-1/2}\right)$$

et

$$P\left(T_{\psi_2}[f](\mathcal{L}(a))\right) = \mathbb{P}_2\left(T_{\psi_2}[f](\mathcal{L}(a))/a^{-1/2}\right),$$

où \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 sont des fonctions universelles qui ne dépendent pas de l'échelle a . Ainsi l'évolution dans les échelles des densités de probabilité des coordonnées cartésiennes T_{ψ_1} et T_{ψ_2} de \mathbf{T}_ψ est respectivement gouvernée par l'exposant $H - 1/2 = H_x + H_y$ et l'exposant $-1/2 = H_y$, où H_x et H_y sont les exposants utilisés lors de la construction des surfaces autoaffines anisotropes étudiées.

Afin de pouvoir prédire les comportements statistiques du module \mathcal{M}_ψ et de l'argument

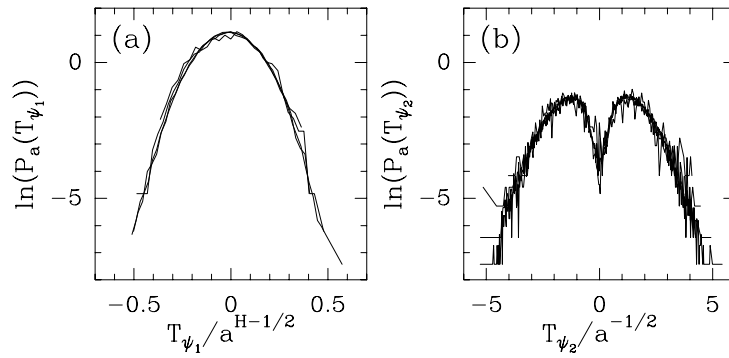


Fig. 2.37 – Pdfs des coordonnées cartésiennes de \mathbf{T}_ψ pour les échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $\ln(P_a(T_{\psi_1}))$ en fonction de $T_{\psi_1}/a^{H-1/2}$. (b) $\ln(P_a(T_{\psi_2}))$ en fonction de T_{ψ_2}/a^{H_y} avec $H_x = H = 1/3$ et $H_y = -1/2$. Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 2.34.

\mathcal{A}_ψ de \mathbf{T}_ψ à partir de ceux de T_{ψ_1} et de T_{ψ_2} , nous allons raisonner sur le cas d'une singularité isolée. Soit une surface possédant un singularité isolée localisée au point \mathbf{b} , telle que le long d'une ligne de maxima qui pointe vers \mathbf{b} , le comportement des composantes du vecteur gradient $\mathbf{T}_\psi = (T_{\psi_1}, T_{\psi_2})$ soit le suivant :

$$\begin{aligned} T_{\psi_1}[f](\mathcal{L}_{\mathbf{b}}(a)) &\sim a^{H-1/2} \sim a^{H_x+H_y}, \\ \text{et} & \\ T_{\psi_2}[f](\mathcal{L}_{\mathbf{b}}(a)) &\sim a^{-1/2} \sim a^{H_y}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Son module suit donc le comportement :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\psi[f](\mathcal{L}_{\mathbf{b}}(a)) &\sim (A_\psi a^{2H-1} + B_\psi a^{-1})^{1/2}, \\ &\sim a^{-1/2} \left(1 + \frac{A_\psi}{B_\psi} a^{2H}\right)^{1/2}, \\ &\sim a^{H_y} \left(1 + \frac{A_\psi}{B_\psi} a^{2H_x}\right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

où A_ψ et B_ψ sont des préfacteurs qui dépendent de la forme de l'ondelette analysatrice. Ainsi, dans la limite $a \rightarrow 0^+$, on obtient la valeur de l'exposant de Hölder local $H_y = -1/2 = \min(1/3, -1/2) = \min(H_x, H_y)$ de cette surface en \mathbf{b} . De plus, à partir de l'équation (2.90), nous pouvons extraire le terme correctif du premier ordre dans le comportement de \mathcal{M}_ψ :

$$\mathcal{M}_\psi[f](\mathcal{L}_{\mathbf{b}}(a)) \sim a^{-1/2} + \frac{A_\psi}{2B_\psi} a^{2H-1/2}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.91)$$

De même on peut exprimer le comportement de l'argument \mathcal{A}_ψ :

$$\tan \mathcal{A}_\psi[f](\mathcal{L}_{\mathbf{b}}(a)) = T_{\psi_1}[f](\mathcal{L}_{\mathbf{b}}(a))/T_{\psi_2}[f](\mathcal{L}_{\mathbf{b}}(a)) \sim a^{-H} \sim a^{-H_x}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.92)$$

On constate que ces prédictions théoriques dans le cas d'une singularité isolée, rejoignent le comportement mesuré dans les équations (2.86) et (2.87) pour les moyennes de \mathcal{M}_ψ et de \mathcal{A}_ψ sur les lignes de maxima des squelettes des transformées en ondelettes de surfaces rugueuses autoaffines anisotropes étudiées dans cette section. Comme dans le cas des surfaces Browniennes fractionnaires, l'étude du comportement de \mathcal{M}_ψ et \mathcal{A}_ψ le long d'une ligne de maxima associée à une surface autoaffine anisotrope permet *a priori* de prédire, dans la mesure où la gamme d'échelles accessible à l'analyse est suffisamment importante, le comportement sur chacune des lignes de maxima (et donc sur la moyenne effectuée sur l'ensemble du squelette) d'une surface homogène monofractale dont toutes les singularités possèdent les mêmes caractéristiques. Ainsi, la méthode MMT0 2D permet non seulement d'extraire une information statistique sur les propriétés de régularité d'une surface rugueuse, mais de plus elle permet de révéler et de caractériser la présence éventuelle d'une brisure de l'isotropie dans les propriétés d'invariance d'échelle de telles surfaces. Dans l'exemple des surfaces autoaffines anisotropes étudiées dans cette section, cette méthode nous a permis d'extraire avec une excellente précision les deux exposants $H_x = H = 1/3$ et $H_y = -1/2$ qui caractérisent complètement les propriétés d'invariance d'échelle de ces surfaces rugueuses.

2.7 Discussion

Dans ce chapitre nous avons présenté une généralisation en 2D de la méthode MMT0 1D [46–50] qui a déjà remporté certains succès dans des domaines aussi variés que la turbulence pleinement développée [46–48, 95–100], l'étude de séquences d'ADN [106–109] ou les signaux financiers [110, 111]. Nous avons validé cette méthode sur des cas d'école de surfaces synthétiques représentant des fonctions monofractales (homogènes) dont les propriétés d'invariance d'échelle sont soit isotropes soit anisotropes. Dans le chapitre 3 nous testerons plus avant cette méthode sur des surfaces synthétiques possédant des propriétés multifractales. Les cas qui retiendront notre attention seront principalement des surfaces rugueuses générées par des processus multiplicatifs de cascades aléatoires log-infiniment divisibles.

Nous terminons ce chapitre en évoquant la possibilité d'utiliser la méthode MMT0 2D pour d'autres applications en analyse et en traitement d'image. En ce qui concerne les premières tentatives d'application des concepts du formalisme multifractal à l'analyse d'image, nous renvoyons le lecteur au travail de Lévy-Véhel dans les Réfs [177, 178].

2.7.1 Détection de contours par la méthode MMT0 2D

Dans cette section, nous présentons une approche qui permet d'utiliser le squelette de la transformée en ondelettes afin d'identifier les contours dans une image. Nous allons baser notre explication sur le cas d'école illustré dans de la figure 2.38a. Le plus souvent les structures d'une image sont délimitées par des lignes plus ou moins régulières correspondant à un saut de l'intensité. Dans la figure 2.38a, nous avons représenté une image composée

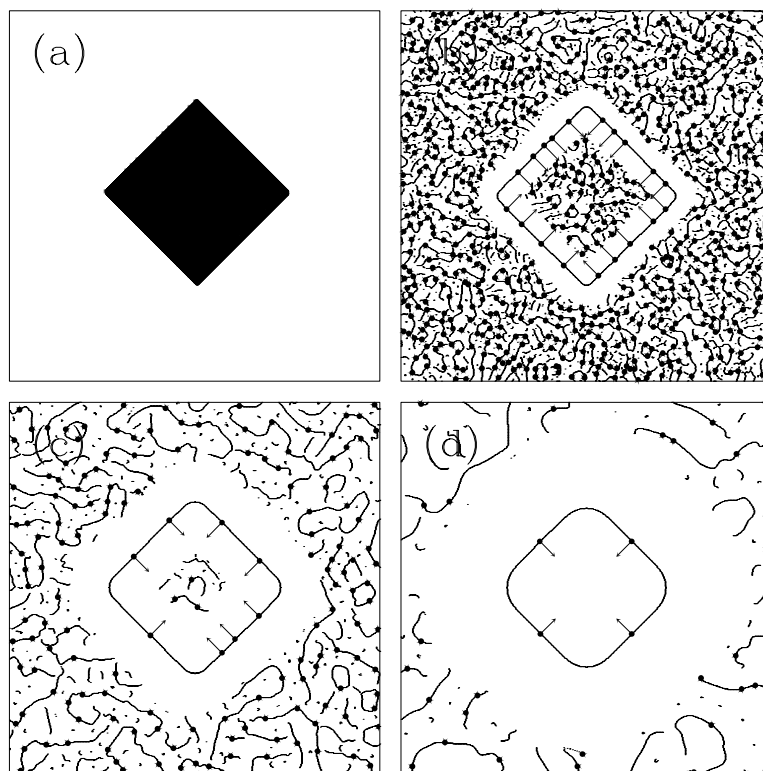


Fig. 2.38 – Détection de contours par la méthode MMTO 2D. (a) Image analysée : un carré superposé à un bruit blanc de faible intensité. Chaînes de maxima (trait plein) calculées aux échelles $a = 2\sigma_W$ (b), $4\sigma_W$ (c) et $8\sigma_W$ (d). Les flèches représentent le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ aux MMMTO (\bullet). ψ est l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ illustrée sur les figures 2.1a et 2.1b.

d'un carré superposé à un bruit blanc de très faible amplitude (256 fois plus faible que celle du carré). Le calcul du squelette de la transformée en ondelettes de cette image avec l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ illustrée dans les figures 2.1a et 2.1b est représenté dans les figures 2.38b ($a = 2\sigma_W$), 2.38c ($a = 4\sigma_W$) et 2.38d ($a = 8\sigma_W$). À chaque échelle, une chaîne fermée de maxima suit plus ou moins fidèlement le contour du carré. Remarquons que cette chaîne approche de mieux en mieux les bords du carré que l'échelle est petite. Intéressons nous, maintenant, au vecteur gradient \mathbf{T}_ψ (flèches) associé aux MMMTO appartenant au squelette de la transformée en ondelettes. On constate que le module \mathcal{M}_ψ des MMMTO qui se trouvent localisés sur la chaîne approchant le contour du carré est beaucoup plus important que les modules des autres MMMTO et ceci quelle que soit l'échelle a . Cela est illustré sur la figure 2.39 où nous avons représenté pour plusieurs échelles, la densité de probabilité $P_a(\mathcal{M})$ des MMMTO appartenant au bord du carré (Fig. 2.39a), comparativement à la densité de probabilité $P_a(\mathcal{M})$ des autres MMMTO (Fig. 2.39b). On constate dans ce dernier cas que le fait d'avoir normalisé \mathcal{M}_ψ par a^{-1} , permet de remettre toutes les courbes obtenues à différentes échelles sur une unique et

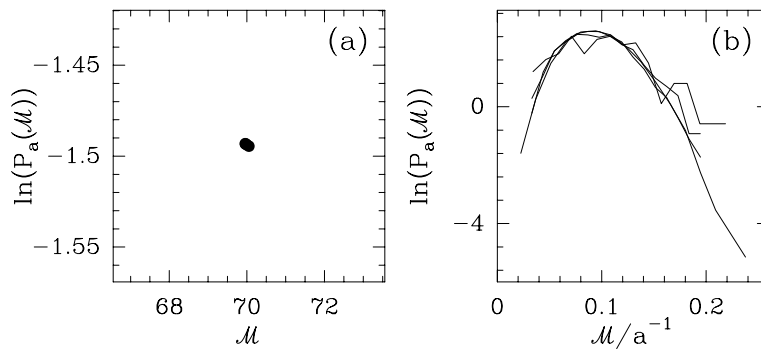


Fig. 2.39 – Pdfs du module des MMTO des sous-squelettes de la transformée en ondelettes de l’image illustrée dans la figure 2.38a. (a) $\ln P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M} , pour le sous-squelette constitué des lignes de maxima convergeant vers les bords du carré (voir texte). (b) $\ln P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M}/a^{-1} , pour le sous-squelette constitué des autres lignes de maxima correspondant au bruit blanc. L’ondelette analysatrice est l’ondelette isotrope d’ordre $n_\psi = 1$ utilisée dans la figure 2.38. Le échelles sont les mêmes que dans la figure 2.38

même courbe. Ceci est la preuve que les MMTO concernés ont un module qui se comporte en loi de puissance dans les échelles avec un exposant $h = -1$, qui est effectivement l’exposant de Hölder des singularités d’un bruit blanc 2D. De même, dans la figure 2.39a, les distributions calculées à toutes les échelles se réduisent à un seul et même point. Ainsi le long des lignes de maxima qui convergent, dans la limite $a \rightarrow 0^+$, vers l’un quelconque des points du bord du carré, \mathcal{M}_ψ n’évolue pas dans les échelles. Ce comportement est significatif d’une singularité d’exposant de Hölder $h = 0$, c’est-à-dire une discontinuité correspondant à un saut de la fonction étudiée. L’utilisation du squelette de la transformée en ondelettes nous permet donc de sélectionner les lignes de maxima qui correspondent au contour du carré. Leur nombre se multiplie comme a^{-1} lorsque l’on descend dans les échelles et dans la limite $a \rightarrow 0^+$, les MMTO correspondants finissent par recouvrir totalement les bords du carré.

En complément de l’étude des pdfs du module, on peut envisager de calculer les spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ (Fig. 2.40) sur chacun des deux sous-squelettes de la transformée en ondelettes 2D définis par ces deux sous-ensembles de MMTO. On constate dans la figure 2.40a que les MMTO du bord du carré correspondent à un spectre $\tau(q)$ horizontal. La linéarité de ce spectre confirme la présence d’un exposant de singularité unique de valeur $h = 0$ (pente nulle). Une transformation de Legendre directe conduit à un spectre des singularités $D(h)$ (Fig. 2.40b) réduit au seul point $D(h = 0) = 1$ ($D(h \neq 0) = -\infty$), qui indique que la dimension associée à cet exposant est bien celle d’une ligne Euclidienne, à savoir le contour du carré en question. La figure 2.40c correspond au spectre $\tau(q)$ calculé à partir des MMTO associés au bruit blanc. À nouveau les données mettent en évidence un comportement linéaire bien défini, signature de la présence d’un seul exposant d’invariance d’échelle dont la valeur $h = -1$ est donnée par la pente de $\tau(q)$. Les données de la figure 2.40c étant en

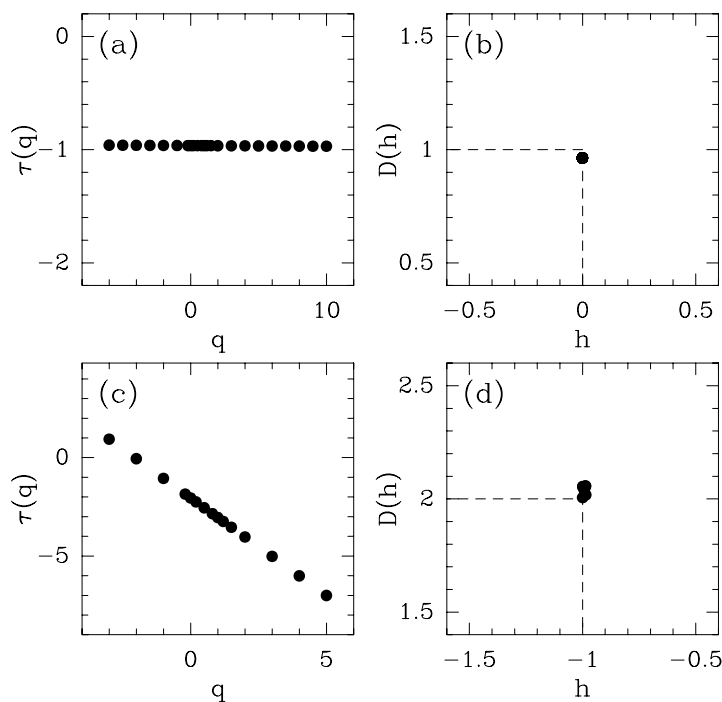


Fig. 2.40 – Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de l'image représentée dans la figure 2.38a. La méthode MMTO 2D est appliquée aux deux sous-squelettes de la transformée en ondelettes 2D définis dans le texte. Sous-squelette correspondant aux bords du carré : (a) $\tau(q)$ en fonction de q ; (b) $D(h)$ en fonction de h . Sous-squelette correspondant au bruit blanc : (c) $\tau(q)$ en fonction de q ; (d) $D(h)$ en fonction de h . Mêmes conditions de calcul que dans les figures 2.38 et 2.39.

excellent accord avec le comportement théorique $\tau(q) = -q - 2$, il n'est pas surprenant que le spectre $D(h)$ (Fig. 2.40d) obtenu par transformation de Legendre ne comporte qu'un seul point $D(h = -1) = 2$ ($D(h \neq -1) = -\infty$). Ce spectre est caractéristique de la monofractalité du bruit blanc présent dans toute l'image. Nous pouvons ainsi identifier sans difficulté les lignes de maxima convergeant vers le contour du carré le long desquelles \mathcal{M}_ψ est important et constant (Fig. 2.39a), parmi les lignes de maxima correspondant au bruit le long desquelles \mathcal{M}_ψ est beaucoup plus faible et dépend de l'échelle.

2.7.2 Débruitage d'une image par la méthode MMTO 2D

Les méthodes de débruitage d'images par seuillage des coefficients en ondelettes ont été appliquées avec certain succès dans des domaines très variés, allant de la restauration d'images photographique jusqu'à l'imagerie médicale [28, 30, 32, 36]. Parmi les méthodes plus ou moins sophistiquées proposées jusqu'à ce jour [179–184], la méthode MMTO 2D semble être une alternative prometteuse. Nous avons reproduit dans la figure 2.41a, l'image du carré bruité de la section précédente, mais avec un bruit blanc d'intensité cette fois bien

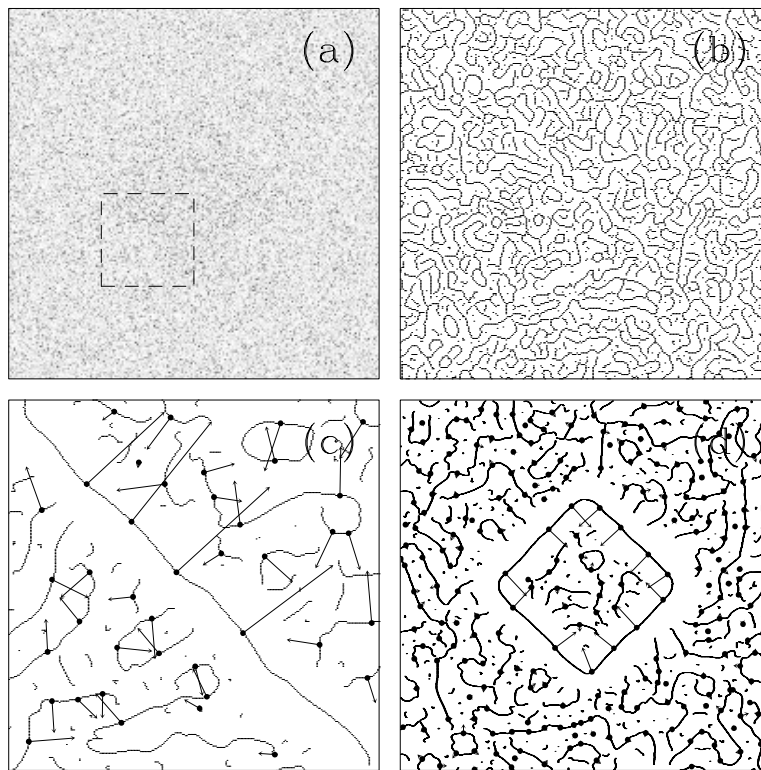


Fig. 2.41 – Débruitage d’une image par la méthode MMT0 2D. (a) Image analysée : un carré superposé à un bruit blanc de forte intensité (4 fois celle du carré). Chaînes de maxima (trait plein) calculées aux échelles suivantes $a = \sigma_W$ (b), $4\sigma_W$ (c) et $8\sigma_W$ (d). Les flèches représentent le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ aux MMT0 (\bullet). Notons que (b) et (c) correspondent à des agrandissements de la zone délimitée par le trait interrompu dans (a). ψ est l’ondelette analysatrice isotrope d’ordre $n_\psi = 1$ utilisée dans la figure 2.38.

supérieure (4 fois) à celle du carré. Le rapport signal sur bruit est désormais tellement faible, qu’il est très difficile de reconnaître le carré dans la figure 2.41a. Cependant le calcul du squelette de la transformée en ondelettes dans les figures 2.41b, 2.41c et 2.41d permet à nouveau d’extraire une approximation des contours du carré tout à fait acceptable. En effet, même si à petite échelle (Fig. 2.41b) il devient de plus en plus délicat de repérer les chaînes de maxima qui sont proches des bords du carré à cause de l’importance du bruit, au dessus d’une valeur $a = a^*$ (Figs 2.41c et 2.41d) il est possible de séparer les MMT0 associés au contour du carré de ceux qui correspondent au bruit blanc. Cette distinction se voit autant sur l’organisation spatiale des chaînes de maxima (présence évidente d’une chaîne fermée sur la figure 2.41d), que sur le comportement du vecteur gradient \mathbf{T}_ψ le long de ces chaînes. Comme dans la section précédente, en observant le comportement de \mathcal{M}_ψ sur une certaine gamme d’échelles supérieures à a^* , on peut donc à nouveau espérer pouvoir séparer le squelette en deux sous-squelettes, l’un étant constitué de lignes de maxima convergeant vers les bords du carré dans la limite $a \rightarrow 0^+$, et l’autre étant constitué des lignes de

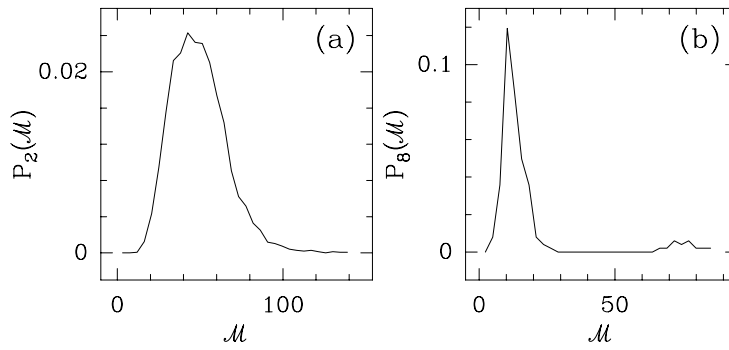


Fig. 2.42 – Pdfs du module des MMMTO des sous-squelettes de la transformée en ondelettes de l'image illustrée dans de la figure 2.41a, calculées aux échelles $a = 2\sigma_W$ (a) et $8\sigma_W$ (b). L'ondelette analysatrice est l'ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ utilisée dans la figure 2.41.

maxima correspondant au bruit. La figure 2.42 représente les pdfs $P_{a=2\sigma_W}(\mathcal{M})$ et $P_{a=8\sigma_W}(\mathcal{M})$ obtenues à petite et à grande échelle. On constate que pour $a = 8\sigma_W$ (Fig. 2.42b), cette pdf présente deux bosses bien distinctes autour de deux valeurs différentes du module \mathcal{M} . L'une, autour de $\mathcal{M}_\psi = 75$, correspond aux lignes de maxima convergeant vers les bords du carré et n'évolue pas dans les échelles ($\mathcal{M}_\psi \sim a^{h=0}$, voir section précédente); l'autre, autour de $\mathcal{M}_\psi = 10$, correspond au lignes de maxima associées au bruit blanc et s'étale aux petites échelles ($\mathcal{M}_\psi \sim a^{-1}$). Ainsi, lorsque a diminue, la distribution du module des gradients des MMMTO associés au bruit blanc finit par atteindre (à l'échelle a^*) et recouvrir celle associée aux MMMTO correspondant aux bords du carré, rendant impossible la discrimination entre ces deux catégories de MMMTO. C'est ce que l'on observe sur la figure 2.42a pour $a = 2\sigma_W$.

Ainsi à l'échelle a^* , qui est la plus petite échelle où cette séparation est possible, nous disposons d'un ensemble de MMMTO qui sont *a priori* associés au bord du carré. Ces MMMTO appartiennent à des lignes de maxima qui existent à des échelles plus petites que a^* . À chaque échelle $a < a^*$, ces lignes de maxima sont définies par des MMMTO qui appartiennent à certaines chaînes de maxima. La figure 2.43 montrent ces chaînes pour deux échelles supérieures à a^* (Figs. 2.43c et 2.43d) et pour deux échelles inférieures à a^* (Figs. 2.43a et 2.43b). On constate qu'à grande échelle, il n'y a qu'une seule chaîne fermée qui fournit une approximation raisonnable du carré à cette résolution. Pour les deux plus petites échelles, les chaînes se multiplient et sont de plus en plus irrégulières. Dans une optique de reconstruction de l'image, plusieurs approches sont possibles. Elles consistent toutes à utiliser l'algorithme de reconstruction à partir des chaînes de maxima proposé par Mallat *et al* [90, 91]. La différence entre ces approches réside dans le choix des chaînes à utiliser. On peut par exemple, choisir de ne sélectionner que les chaînes qui contiennent sans ambiguïté des MMMTO associés au bord du carré, c'est-à-dire celles identifiées à des échelles supérieures ou égales à a^* . Le résultat donne un carré lissé à l'échelle a^* . Un autre choix possible est de garder toutes les chaînes par lesquelles passe au moins une ligne de maxima identifiée à l'échelle a^* comme convergeant vers le contour du carré. Ainsi, on

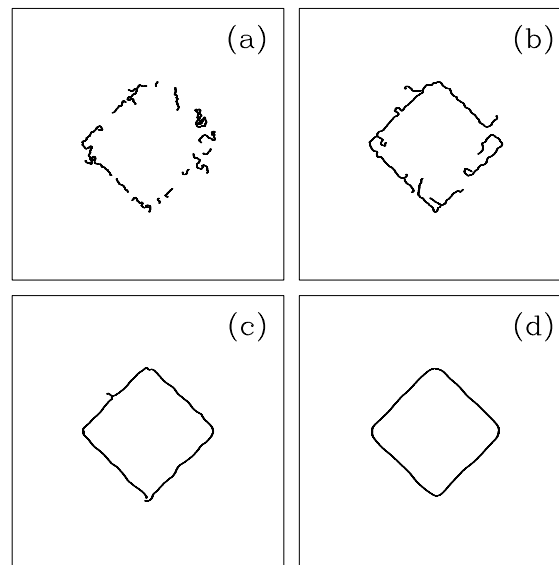


Fig. 2.43 – Débruitage de l’image illustrée dans la figure 2.41a par la méthode MMTO 2D. Chaînes de maxima par lesquelles passent au moins une ligne de maxima identifiée à l’échelle a^* comme associée aux bords du carré. Quatre échelles sont représentées : $a = 2^{0.1}\sigma_W$ (a), $2^{1.1}\sigma_W$ (b), $2^{2.1}\sigma_W$ (c) et $2^{3.1}\sigma_W$ (d). L’ondelette analysatrice est l’ondelette isotrope d’ordre $n_\psi = 1$ utilisée dans la figure 2.41.

conserve des chaînes de maxima à des échelles $a < a^*$ et on accède à des détails plus fins, même s’ils sont bruités. Cette approche peut être combinée à une régularisation des chaînes sélectionnées aux échelles $a < a^*$. Cette régularisation peut se faire en appliquant un lissage à ces chaînes, ou en les remplaçant tout simplement par celles de l’échelle a^* . Une telle stratégie débouche sur un carré dont les coins sont arrondis à l’échelle a^* , mais dont les bords sont beaucoup plus nets. Enfin, la mise en œuvre d’un algorithme de reconstruction basé directement sur les MMMTO (et non plus sur les chaînes de maxima) permettrait de contourner ce problème de sélection des chaînes de maxima et, d’un point de vue plus général, fournirait un outil de synthèse basé sur une représentation plus compacte.

Pour finir, signalons que le but de cette section est simplement d’attirer l’attention sur des applications possibles de la méthode MMTO 2D en traitement et analyse d’images. Cette méthode allie les avantages de l’approche multifractale [177, 178] à ceux des différentes méthodes de seuillage par ondelettes [179–184]. Fortement inspirée par la méthode de calcul des maxima du module de la transformée en ondelettes 2D développées par Mallat et ses collaborateurs [90, 91], elle n’impose pas au bruit d’être Gaussien et non corrélé. La présence de corrélations dans le bruit entraîneraient simplement un comportement en loi de puissance d’exposant différent de $h = -1$ pour le module \mathcal{M}_ψ le long des lignes de maxima concernées. Remarquons enfin qu’un seuillage est effectivement effectué à l’échelle a^* , mais qu’il n’est pas nécessaire d’en effectuer un à chaque échelle de la décomposition.

Chapitre 3

Application de la MMTO 2D à l'analyse de surfaces multifractales synthétiques

3.1 Introduction

Depuis quelques années, les modèles de cascades multiplicatives ont suscité un intérêt croissant en tant que paradigme des objets multifractals [2,3,39–43,93,185]. La notion de cascade fait référence à des processus autosimilaires dont les propriétés sont définies de façon multiplicative depuis les grandes jusqu'aux petites échelles. C'est en ce sens que cette notion occupe une place centrale dans la théorie statistique de la turbulence pleinement développée [20,87,185]. Depuis le célèbre poème de Richardson [186], l'image de la cascade turbulente a souvent été utilisée pour représenter le phénomène d'intermittence observé dans les écoulements hydrodynamiques à haut nombre de Reynolds [20,87,186–189] : l'énergie est transférée d'échelle en échelle pour finalement être dissipée aux petites échelles par les effets visqueux. Contrairement à la théorie développée par Kolmogorov en 1941 [190], le taux de transfert de l'énergie cinétique n'est pas réparti de façon homogène dans l'espace, mais présente de fortes fluctuations locales distribuées plus ou moins aléatoirement [20,87,188,189]. Depuis environ quarante ans, la littérature s'enrichit de modèles de plus en plus sophistiqués pour représenter le processus de cascade d'énergie dans les écoulements turbulents. Ce sont principalement le modèle log-normal de Kolmogorov [191] et Obukhov [192], les modèles multiplicatifs de cascades hiérarchiques comme le modèle β aléatoire [193], le

modèle α [194], le modèle p [195] (voir Réf. [185] pour une présentation détaillée de ces modèles), les modèles log-stables [130, 133, 196] et plus récemment les modèles de cascades infiniment log-divisibles [197–202] tel que le modèle log-Poisson introduit par She et ses collaborateurs [200, 203]. Sur un plan plus général, une cascade autosimilaire est définie par la statistique des facteurs multiplicatifs utilisés à chaque étape du processus ainsi que par l'évolution de ces facteurs dans les échelles [93, 133, 185]. On peut ainsi distinguer les cascades *discrètes*, qui font intervenir des rapports d'échelles discrets entraînant des corrections log-périodiques dans les lois d'échelle (invariance d'échelle discrète [204–206]), des cascades *continues* sans facteur d'échelle privilégié (invariance d'échelle continue [197–202]). En ce qui concerne le processus de fragmentation, on peut distinguer les cascades *conservatives* (la mesure est conservée à chaque étape de la cascade) des cascades *non-conservatives* (seulement une fraction de la mesure est transférée à chaque étape) [93]. D'un point de vue plus fondamental, on peut définir deux grandes classes de processus de cascades autosimilaires : les cascades *déterministes* qui correspondent généralement à des modèles « solubles » [185] et les cascades *aléatoires* qui fournissent des modèles plus réalistes mais dont l'étude des propriétés multifractales nécessite un soin tout particulier [93]. Membres de cette dernière classe, les cascades \mathcal{M} introduites par Mandelbrot [187, 207, 208] pour modéliser le *curdling* aléatoire en turbulence pleinement développée, constituent le seul modèle pour lequel il existe des résultats mathématiques rigoureux [209, 210]. Notons que la plupart de ces modèles de cascades 1D possèdent une généralisation en 2D, voire en dimensions supérieures. Dans la mesure où les systèmes hautement turbulents (comme par exemple la turbulence atmosphérique [12]) ont de grandes chances de posséder des lois d'invariance d'échelle anisotrope, une modélisation qui se veut réaliste doit permettre la prise en considération d'une anisotropie spatiale [12, 130–133]. De plus, comme l'ont fait remarquer Schertzer et Lovejoy [131], cette « première génération » de modèles de cascades manque incontestablement de flexibilité. En effet, ces modèles rendent compte uniquement de la structure hiérarchique multiplicative des données dans le domaine spatial [133]. Afin de modéliser l'évolution temporelle, c'est-à-dire l'aspect dynamique de la turbulence, ces auteurs ont proposé une « seconde génération » de modèles qualifiés de *cascades « espace-temps »* dans la mesure où ils intègrent des lois d'invariance d'échelle anisotrope par rapport à l'espace et au temps, ainsi que la brisure de la symétrie le long de l'axe temporel, c'est-à-dire la causalité [131–133]. Pour les bases nécessaires à la manipulation des lois d'échelle anisotropes « espace-temps », nous renvoyons le lecteur aux Réfs [132, 133], où les concepts d'invariance d'échelle généralisée (GSI, de l'anglais *Generalized Scale Invariance*) et de multifractales « espace-temps » ont été introduits et explorés.

Cependant, aussi bien en physique que dans d'autres domaines des sciences fondamentales comme des sciences appliquées, les fractales interviennent tout autant sous la forme de fonctions singulières que sous la forme de mesures singulières [2, 3, 5–21]. Ainsi, en turbulence pleinement développée, les quantités directement observables sont plutôt les champs de vitesse et de température que le champ de dissipation [20, 87, 188, 189]. Toutefois, si dans la littérature il y a pléthore de modèles de cascades – monofractales ou multifractales, déterministes ou aléatoires – qui génèrent des *mesures singulières* à la limite des petites échelles, par contre, on y trouve très peu d'algorithmes pour synthétiser des *fonc-*

tions rugueuses multifractales d'une ou de plusieurs variables. Au-delà du problème de la description multifractale de telles fonctions (qui a trouvé une solution avec la méthode MMTO décrite dans les références [38, 46–50]), se pose en effet le problème concret de la construction d'une fonction multifractale. Schertzer et Lovejoy [130] ont proposé comme stratégie d'utiliser un simple filtrage en loi de puissance (intégration fractionnaire) d'une mesure singulière engendrée multiplicativement par une modèle de cascade. Cette approche combine ainsi une procédure multiplicative avec une procédure additive qui n'est pas sans rappeler certains algorithmes de synthèse de mouvements Browniens fractionnaires (fBm, de l'anglais *fractional Brownian motion*) [2, 3, 72, 73, 168]. Dans le même esprit, le modèle de cascade bornée (*bounded cascade model*, en anglais) de Marshak *et al* [211] consiste à jouer sur les poids multiplicatifs de la cascade (dans l'espace direct cette fois), pour retrouver la propriété de continuité des fonctions à la limite des petites échelles. Dans les Réfs [88, 89, 212], la technique du déplacement du point milieu (*midpoint displacement*, en anglais), utilisée pour construire des fBms, a été généralisée afin de générer des fonctions multiaffines aléatoires comme déterministes. Véritable généralisation de la notion d'escalier du diable, des fonctions multifractales ont été générées dans les Réfs [48, 50] par intégration ordinaire ou fractionnaire de mesures signées obtenues par des procédures de style cascade. Plusieurs autres tentatives pour simuler une turbulence synthétique – qui posséderait les mêmes propriétés d'intermittence que les données expérimentales de vitesse turbulente – ont conduit à des résultats plus ou moins convaincants [213–216]. Récemment, l'utilisation des bases d'ondelettes pour construire des signaux invariants d'échelle [96, 97, 217–219] a permis de généraliser aux fonctions, le concept de cascade autosimilaire utilisé jusqu'alors uniquement pour créer des mesures singulières. Désormais, la répartition multiplicative des poids se fait, non plus sur des sous-intervalles du signal, mais sur la grille dyadique des coefficients en ondelettes. Cette méthode a été mise en œuvre pour générer des fonctions multifractales correspondant à un processus multiplicatif aléatoire ou déterministe donné au préalable. D'un point de vue mathématique, la convergence de ces cascades \mathcal{W} et les propriétés de régularité des fonctions déterministes ou stochastiques obtenues à la limite d'un nombre infini d'étapes de construction, ont été discutées par Arneodo et ses collaborateurs dans la Réf. [219].

Revenons à notre problématique de départ, à savoir les surfaces rugueuses générées par des fonctions fractales de deux variables réelles. Nous avons vu, dans le chapitre 2, qu'il existe plusieurs algorithmes couramment utilisés dans la littérature pour la génération de surfaces Browniennes fractionnaires [72, 73, 168, 169, 171, 172]. Nous avons montré que les surfaces simulées par de tels processus additifs possèdent des propriétés monofractales homogènes, à savoir qu'un seul exposant, appelé exposant de Hurst, suffit pour caractériser leurs propriétés d'invariance d'échelle. En ce qui concerne les fonctions multifractales de deux variables, à notre connaissance, seuls deux modèles ont été étudiés dans la littérature. Tous deux furent développés pour des applications atmosphériques et ne sont qu'une simple généralisation à 2D des modèles de cascades singulières intégrées fractionnairement d'une part [130, 133, 220, 221], et de cascades bornées d'autre part [222, 223]. Précisons toutefois que cette thèse se situe dans un contexte qui se veut plus général que la turbulence et les diverses applications possibles à la géophysique (cet aspect sera traité dans le

chapitre 4). Ainsi notre premier objectif dans ce chapitre est d’explorer et d’exploiter les différents moyens de générer des surfaces rugueuses possédant une statistique multifractale prédéfinie. Pour cela, nous allons nous baser sur le concept des cascades \mathcal{W} aléatoires définies sur l’arbre dyadique de la décomposition en ondelettes 1D discrète [96–98, 217–219]. L’idée est de définir une nouvelle classe de fonctions de carré sommable (énergie finie) de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , en utilisant les bases orthogonales d’ondelettes séparables en 2D. Les propriétés multifractales résultent directement du processus multiplicatif utilisé pour calculer les coefficients en ondelettes : ces fonctions sont construites récursivement sur la représentation espace-échelles fournie par la base orthogonale d’ondelettes, « cascasant » depuis une grande échelle arbitraire jusqu’aux petites échelles. Ces modèles de cascades \mathcal{W} 2D aléatoires possèdent deux avantages majeurs dans la perspective de recherches futures. D’un point de vue théorique, l’utilisation des bases orthogonales d’ondelettes fournit un cadre mathématique propice à des résultats rigoureux. D’un point de vue pratique, le fait d’utiliser une approche multirésolution séparable permet de mettre en œuvre un algorithme simple et efficace pour la synthèse de surfaces rugueuses multifractales. Précisons que cet algorithme est suffisamment souple pour permettre la modélisation de propriétés d’invariance d’échelle anisotropes. Notre deuxième et principale préoccupation dans ce chapitre est de tester la robustesse et la fiabilité de la méthode MMTO 2D présentée dans la section 2.4. Dans ce but, nous allons abondamment utiliser cet algorithme de synthèse multirésolution pour créer des collections d’images numériques de surfaces rugueuses multifractales, chaque famille correspondant à un processus de cascade particulier (processus log-normal, processus log-Poisson, etc.). Pour chaque ensemble d’images ainsi synthétisées, nous pouvons alors appliquer la méthode MMTO 2D afin de calculer numériquement les spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ avant de les comparer aux prédictions théoriques. Dans la perspective de l’exploitation de données satellites sur la structure de nuages que nous développerons dans le chapitre 4, nous présentons, pour comparaison, les résultats obtenus avec le modèle de cascades singulières intégrées fractionnairement [130, 133, 220, 221] précédemment évoqué comme exemple de modèle réaliste en géophysique.

Il est important de remarquer que la détermination des spectres multifractals fournit essentiellement une description statistique des propriétés d’invariance d’échelle des images analysées. En effet, de l’analogie qui existe entre la description multifractale et la thermodynamique statistique [39–46], il ressort que les spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ jouent le rôle de potentiels thermodynamiques, à savoir l’énergie libre et l’entropie. Or les potentiels thermodynamiques ne contiennent qu’une information dégénérée sur l’« Hamiltonien » du problème, à savoir, dans le cas qui nous intéresse, le processus multiplicatif sous-jacent à la structure hiérarchique des fluctuations de rugosité de la surface étudiée [100, 104]. Ainsi, il n’est pas surprenant que la détermination expérimentale des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de champs turbulents ne permette pas de faire la distinction entre différents modèles de cascades (déterministes ou aléatoires) existants. Afin de dépasser la description multifractale classique, Castaing et ses collaborateurs [201, 224–230] ont proposé une nouvelle approche du phénomène d’intermittence en turbulence pleinement développée. L’idée consiste à modéliser l’évolution dans les échelles de la forme de la densité de probabilité (pdf, de l’anglais *probability density function*) des incréments de vitesse, par une équation fonctionnelle qui

relie deux échelles par l'intermédiaire d'un noyau G . Expérimentalement, on observe une évolution caractéristique de cette pdf depuis une forme approximativement Gaussienne à grande échelle vers des profils à queues exponentielles étirées à petite échelle [224, 231–234]. Le noyau G contient en fait une information sur l'autosimilarité du processus multiplicatif sous-jacent : sa forme est déterminée par la nature du processus de fragmentation à chaque étape de la cascade, alors que la manière dont il dépend des deux échelles mises en jeu reflète les propriétés d'invariance d'échelle de la cascade. Dans leur travail exploratoire, Castaing *et al* [201, 224–229] se sont principalement concentrés sur l'estimation de la variance de G ainsi que sur son comportement dans les échelles. Arneodo et ses collaborateurs ont récemment généralisé cette approche en remplaçant les incréments par les coefficients de la transformée en ondelettes, afin d'accéder à la forme générale du noyau G [96, 97, 100, 218]. Cette méthode a d'abord été testée sur des signaux turbulents synthétiques 1D, pour ensuite être appliquée aux données de la turbulence et en particulier aux champs de vitesse [96, 97, 100, 218]. Le calcul du noyau G aux plus grands nombres de Reynolds accessibles expérimentalement, met clairement en évidence l'existence d'une gamme d'échelles conséquente pour laquelle la forme de G est invariante et remarquablement bien reproduite par une loi log-normale [96, 97, 100]. (Remarquons que cette observation fournit une définition objective du domaine inertiel.) De plus, le fait que le nombre d'étapes de la cascade évolue en loi de puissance en fonction de l'échelle (et non en fonction de son logarithme), est la signature d'une brisure de l'invariance d'échelle [96, 97, 100, 235]. Cependant, comme le suggèrent des études menées pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, la description multifractale basée sur un processus multiplicatif log-normal invariant d'échelle est une solution tout à fait plausible au phénomène d'intermittence dans la limite asymptotique des grands nombres de Reynolds [97, 100, 235].

Comme cela a été fort justement remarqué dans la Réf. [236], l'utilisation des fonctions de corrélation dans l'espace mais aussi dans les échelles, permet d'effectuer un pas significatif supplémentaire dans la recherche de processus multiplicatifs de cascade. Le squelette de la transformée en ondelettes, défini par les maxima locaux de son module, contient en effet toute l'information « espace-échelles » nécessaire à cette analyse statistique à « deux points ». Le processus multiplicatif de cascade sous-jacent étant, en quelque sorte, codé dans la structure arborescente de ce squelette [100, 236–238], le calcul des fonctions de corrélation espace-échelles permet de révéler et de quantifier l'existence d'une structure ultramétrique dans la représentation en ondelettes [236]. Des applications préliminaires de cette méthode à des données de turbulence pleinement développée et à des séries temporelles financières ont été menées avec un certain succès dans les Réfs [100, 111, 236]. Le troisième objectif déclaré de ce chapitre est de généraliser aux surfaces rugueuses les algorithmes 1D de calcul du noyau d'autosimilarité et des fonctions de corrélation espace-échelles. Notre intention est de valider l'utilisation de ces nouveaux logiciels par l'intermédiaire des surfaces synthétiques générées suivant les processus de cascades \mathcal{W} aléatoires pour lesquelles la forme du noyau et l'expression des fonctions de corrélation sont connues analytiquement.

Ce chapitre est organisé comme suit. La section 3.2 décrit les versions 2D des modèles de cascades dont nous nous servons tout au long de ce chapitre, à savoir les cascades singulières intégrées fractionnairement et les processus de cascades \mathcal{W} aléatoires sur des

bases orthogonales d'ondelettes séparables. Ces modèles sont ensuite utilisés pour synthétiser des surfaces rugueuses qui possèdent des propriétés multifractales définies au préalable, c'est-à-dire dont les spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ sont connus analytiquement. Dans la section 3.3, nous appliquons la méthode MMTO 2D présentée dans la chapitre 2, aux surfaces synthétiques générées dans la section 3.2. L'objectif principal est de calibrer nos outils numériques afin de pouvoir les appliquer plus tard à des signaux expérimentaux (voir chapitre 4). En particulier, un de nos soucis majeurs est de bien maîtriser les problèmes de convergence statistique et d'effets de taille finie. Les sections 3.4 et 3.5 sont respectivement consacrées à la généralisation en 2D de l'approche du noyau d'autosimilarité et de la méthode des fonctions de corrélation espace-échelles [100]. Nous illustrons notre propos de diverses applications numériques qui confirment la nécessité d'explorer les propriétés d'ultramétrie du squelette de la transformée en ondelettes, afin de mettre en évidence la structure hiérarchique multiplicative sous-jacente aux fluctuations de rugosité des surfaces multifractales. Nous concluons dans la section 3.6 en mettant en avant l'extrême diversité des applications potentielles d'une telle méthodologie, que ce soit en traitement d'images, en synthèse de surfaces rugueuses, et de façon plus générale en analyse de données numériques comme expérimentales.

3.2 Synthèse de surfaces rugueuses multifractales : modèles hiérarchiques

Il existe de nombreux algorithmes qui permettent de générer des mesures multifractales à partir de processus multiplicatifs de cascades [12, 130–133, 185, 187, 191–203]. Par contre la littérature est relativement pauvre en méthodes de synthèse débouchant sur des fonctions multifractales [48, 50, 88, 96, 97, 130, 211–219]. Dans cette section nous présentons, dans un premier temps, la cascade singulière intégrée fractionnairement (FISC, de l'anglais *Fractionally Integrated Singular Cascade*) qui bénéficie d'une certaine popularité pour la modélisation de champs multifractals en géophysique [120, 122, 130, 133, 220, 221, 239]. Nous introduisons, ensuite, une méthode originale de construction de surfaces aléatoires multifractales à partir de bases orthogonales d'ondelettes séparables.

3.2.1 Cascades singulières intégrées fractionnairement (FISC)

Schertzer et Lovejoy ont proposé un modèle stochastique de fonctions multifractales pour rendre compte de la nature intermittente de nombreuses données géophysiques : pluviométrie (1D), nuages (2D), profils géologiques (2D), etc. [130, 133, 220, 221, 223, 239]. Ce modèle consiste à synthétiser dans un premier temps une mesure multifractale générée à partir d'un processus de cascade singulière, puis de transformer cette mesure en une fonction multifractale via une intégration fractionnaire, c'est-à-dire par l'application d'un simple filtrage dans l'espace de Fourier. Cette stratégie est directement inspirée de la méthode de

construction des escaliers du diable qui résultent d'une simple intégration de mesures de Bernoulli distribuées sur un Cantor [2, 3, 46, 48, 50].

Un processus multiplicatif de cascade consiste à définir un domaine 2D de l'espace, par exemple un carré de côté L , sur lequel on distribue uniformément une mesure $\mu = \mu_L$. La première étape de construction consiste à diviser ce domaine en sous-domaines, par exemple quatre carrés de côté $L/2$, qui prennent chacun une fraction M différente de la mesure précédente, M étant une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est donnée par $P(M)$. Cette étape est répétée sur chaque sous-domaine de façon récursive, afin d'obtenir, au bout de n étapes, une mesure singulière sur le carré $L \times L$:

$$\mu_n(\mathbf{x}; l) = \mu_L \prod_{i=1}^n M_i, \quad l/L = 2^{-n} \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Comme le processus de cascade ainsi défini tend à recouvrir tout l'espace, la nature singulière de la mesure est entièrement contenue dans l'expression de la distribution de probabilité du facteur multiplicatif M [185, 187]. Le modèle que nous allons considérer dans cette étude est le modèle p (ou modèle binomial) qui a été introduit par Meneveau et Sreenivasan [195] pour simuler les fluctuations fortement intermittentes du champ de dissipation d'énergie en turbulence pleinement développée. Dans ce modèle, $P(M)$ s'exprime simplement sous la forme [185, 195] :

$$P(M) = 1/2 \left\{ \delta(M - M^{(1)}) + \delta(M - M^{(2)}) \right\}, \quad (3.2)$$

où

$$M^{(1)} = p/2, \quad M^{(2)} = (1-p)/2, \quad 0 \leq p \leq 1/2, \quad (3.3)$$

indépendamment de l'étape de la cascade. Nous imposons, de plus, que la mesure soit conservée à chaque étape. Ainsi nous sélectionnons aléatoirement les deux sous-carrés qui recevront le poids $M^{(1)} = p/2$, les deux autres carrés recevant alors automatiquement le poids $M^{(2)} = (1-p)/2$. La simplicité de ce modèle permet de prédire sans trop de difficultés (voir les Réfs [185, 195] pour des calculs détaillés) l'expression du spectre $\tau(q)$ défini dans la section 2.4.1 (Éqs (2.59) et (2.60), page 70) :

$$\tau_\mu(q) = -(q+1) - \log_2(p^q + (1-p)^q). \quad (3.4)$$

Lorsque $p \neq 1/2$, ce spectre est non-linéaire, caractérisant ainsi les propriétés multifractales de la mesure μ . Le cas $p = 1/2$ correspond à une distribution uniforme de la mesure sur tout le carré. La figure 3.1a illustre une réalisation d'une telle mesure obtenue après dix étapes de construction pour les valeurs suivantes des paramètres : $L = 1024$ et $p = 0.32$. L'aspect très irrégulier et intermittent de cette mesure est significatif de son caractère hautement singulier. Cette observation est confirmée dans la figure 3.2a où est représenté le profil très chahuté d'une coupe 1D de cette mesure. À la limite d'un nombre d'étapes infini, le produit $\prod_{i=1}^n M_i$ dans l'équation (3.1) est nul presque partout, et infini en un nombre de points

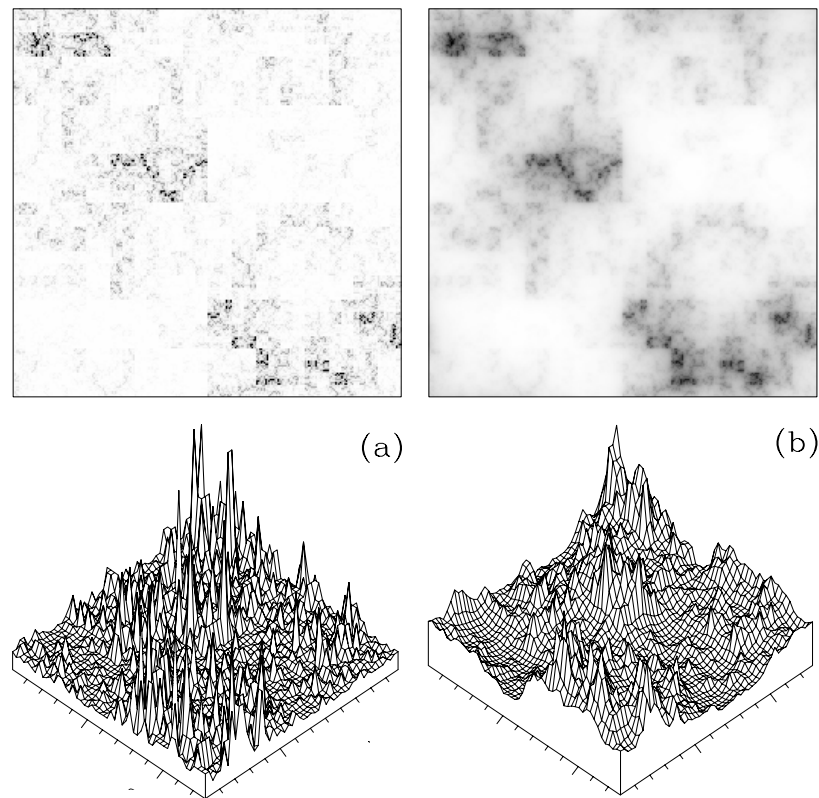


Fig. 3.1 – (a) Mesure multifractale générée par le modèle de cascade binomiale de paramètre $p = 0.32$ après dix étapes de construction. (b) Surface rugueuse multifractale obtenue par intégration fractionnaire d'exposant $H^* = 0.638$ de la mesure singulière illustrée en (a). Les images sont codées du blanc (min) au noir (max).

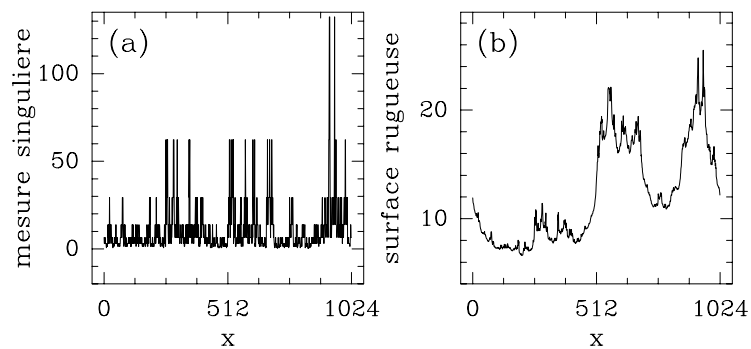


Fig. 3.2 – Profils 1D obtenus à partir d'une coupe horizontale dans les figures 3.1a et 3.1b : (a) μ_n en fonction de x ; (b) f en fonction de x .

suffisant pour que la masse μ_L soit conservée sur le domaine : ceci indique clairement que nous sommes en présence d'une mesure singulière.

Afin d'obtenir une fonction continue, nous effectuons une intégration fractionnaire en appliquant un filtre passe bas en loi de puissance sur la transformée de Fourier de la mesure précédente [130,133] :

$$\hat{f}_n(\mathbf{k}) = A(H^*)\hat{\mu}_n(\mathbf{k})\cdot|\mathbf{k}|^{-H^*}, \quad (3.5)$$

où

$$A(H^*) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}H^*\right) \Gamma(H^*). \quad (3.6)$$

La fonction obtenue est un « lissage » de la mesure μ_n :

$$f_n(\mathbf{x}) = \mu_n(\mathbf{x}) \star |\mathbf{x}|^{-(1-H^*)}, \quad 0 < H^* < 1. \quad (3.7)$$

où le symbole \star représente le produit de convolution. La figure 3.1b montre le résultat de l'intégration fractionnaire d'ordre $H^* = 0.638$ de la mesure représentée dans la figure 3.1a. Nous avons choisi cette valeur pour l'exposant H^* afin que dans la limite d'un nombre d'étapes n infini, la fonction f_n converge vers une fonction f continue en tout point, c'est-à-dire telle que le support de son spectre des singularités $D(h)$ ne contienne pas de valeurs négatives ou nulle de l'exposant de Hölder h ($0 < h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$). On retrouve le caractère intermittent – ou multifractal – de cette fonction lorsque l'on examine le profil d'une coupe 1D de cette surface (Fig. 3.2b). Le spectre $\tau(q)$ de cette fonction multifractale se calcule simplement à partir de celui de la mesure singulière donné dans l'équation (3.4) [120,122,223,239] :

$$\begin{aligned} \tau_f(q) &= \tau_\mu(q) + qH^*, \\ &= -1 - q(1 - H^*) - \log_2(p^q + (1 - p)^q). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Remarquons que pour $q = 0$, on trouve $\tau_f(0) = -D_F = -2$, c'est-à-dire que cette fonction est singulière en tout point. Pour $q = 1$, nous avons $\tau_f(1) = H^* - 2$, ce qui nous permet d'exprimer la dimension fractale de cette surface :

$$\begin{aligned} d_F(\mathcal{S}) &= \max(2, 1 - \tau_f(1)), \\ &= \max(2, 3 - H^*), \\ &= 3 - H^*, \end{aligned} \quad (3.9)$$

c'est-à-dire que cette dimension est comprise entre 2 et 3 pour $H^* \in [0, 1]$. De même, nous pouvons extraire l'exposant β du comportement en loi de puissance de la densité spectrale :

$$S(|\mathbf{k}|) \sim |\mathbf{k}|^{-\beta}, \quad (3.10)$$

avec

$$\begin{aligned} \beta &= \tau_f(2) + 4, \\ &= 1 + 2H^* - \log_2(2p^2 - 2p + 1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

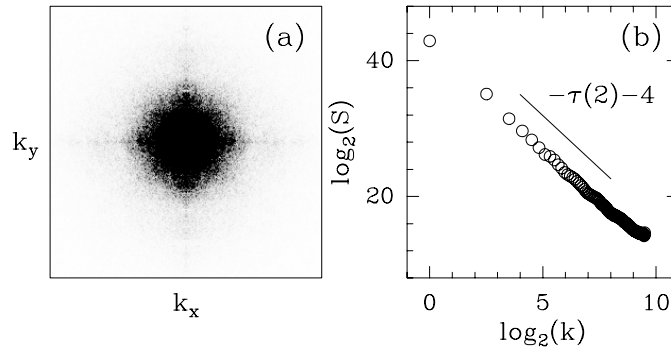


Fig. 3.3 – Analyse spectrale de l’image (1024×1024) de la surface multifractale générée dans la figure 3.1b par le modèle de cascade singulière intégrée fractionnaire. (a) $\ln |\hat{f}_{n=10}|$ codée du blanc (min \hat{f}) au noir (max \hat{f}). (b) Densité spectrale $S(|\mathbf{k}|)$ en fonction $|\mathbf{k}|$ dans une représentation logarithmique. La droite en trait plein correspond à la prédiction théorique de l’exposant spectral $\beta = \tau_f(2) + 4 = 1 + 2H^* - \log_2(2p^2 - 2p + 1)$ (Éq. (3.11)) avec $p = 0.32$ et $H^* = 0.638$.

Dans la figure 3.3, nous rapportons les résultats de l’analyse spectrale de la surface représentée dans la figure 3.1b. On constate dans la figure 3.3a, que la transformée de Fourier de cette fonction possède des directions privilégiées suivant k_x et k_y , dues à l’anisotropie du réseau carré sous-jacent à la règle de construction du processus de cascade. La densité spectrale représentée dans la figure 3.3b suit une loi de puissance d’exposant $\beta = 3.10$ qui est en parfait accord avec la prédiction théorique de l’équation (3.11).

Les bornes du support du spectre des singularités $D(h)$ s’obtiennent en prenant respectivement les limites $q \rightarrow \pm\infty$ de $\partial\tau_f(q)/\partial q$ [46, 48] :

$$h_{\min} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{\partial\tau_f(q)}{\partial q} = H^* - 1 - \log_2(1 - p), \quad (3.12)$$

et

$$h_{\max} = \lim_{q \rightarrow -\infty} \frac{\partial\tau_f(q)}{\partial q} = H^* - 1 - \log_2(p), \quad (3.13)$$

avec $0 \leq p \leq 1/2$. Pour toute les valeurs de $q \neq 1/2$, la surface exhibe des propriétés d’invariance d’échelle multifractales caractérisées par un exposant de Hölder h qui fluctue spatialement d’un point à un autre et qui prend des valeurs dans l’intervalle $[h_{\min}, h_{\max}]$.

3.2.2 Cascades aléatoires sur des bases orthogonales d’ondelettes séparables

Comme nous l’avons évoqué dans l’introduction de ce chapitre, une cascade \mathcal{W} [219] est construite récursivement sur la grille carrée 2D de la base orthogonales d’ondelettes séparables. Les échelles mises en jeu dans f sont donc comprises entre L (la taille de l’image)

et 0 (exclue). Pour des raisons techniques et pratiques nous allons utiliser des ondelettes à support compact [29].

Bases orthogonales d'ondelettes en deux dimensions [29, 36, 51]

Comme à une dimension, la notion de résolution est formalisée par des projections dans des espaces de taille variable. L'approximation d'une image $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$ à la résolution 2^{-j} est définie comme étant la projection orthogonale de f sur l'espace \mathbf{V}_j^2 qui est contenu dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$. L'espace \mathbf{V}_j^2 est l'ensemble de toutes les approximations de f à la résolution 2^{-j} . La taille de \mathbf{V}_j^2 décroît avec la résolution. Pour des raisons de simplicité, nous considérons dans cette étude une analyse multirésolution séparable. Soit $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Une analyse multirésolution séparable 2D est définie à partir du produit tensoriel :

$$\mathbf{V}_j^2 = \mathbf{V}_j \otimes \mathbf{V}_j. \quad (3.14)$$

Soit \mathbf{W}_j^2 l'espace des détails orthogonal à l'espace \mathbf{V}_j^2 et complémentaire de celui ci dans l'espace d'approximation \mathbf{V}_{j-1}^2 de résolution inférieure :

$$\mathbf{V}_{j-1}^2 = \mathbf{V}_j^2 \oplus \mathbf{W}_j^2. \quad (3.15)$$

On peut réexprimer cette équation sous la forme suivante :

$$\mathbf{V}_{j-1} \otimes \mathbf{V}_{j-1} = (\mathbf{V}_j \otimes \mathbf{V}_j) \oplus \mathbf{W}_j^2. \quad (3.16)$$

Ainsi, en insérant $\mathbf{V}_{j-1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j$ dans l'équation (3.16), on obtient après quelques étapes élémentaires de calcul :

$$\mathbf{W}_j^2 = (\mathbf{V}_j \otimes \mathbf{W}_j) \oplus (\mathbf{W}_j \otimes \mathbf{V}_j) \oplus (\mathbf{W}_j \otimes \mathbf{W}_j). \quad (3.17)$$

Comme dans le cas 1D, l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ peut être entièrement décomposé en une somme orthogonale des espaces des détails à toutes les résolutions [29, 36, 51] :

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{W}_j^2. \quad (3.18)$$

Une base orthogonale d'ondelettes séparables de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ est constituée des produits séparables d'une fonction d'échelle ϕ et d'une ondelette ψ . Définissons les trois ondelettes suivantes [29, 36, 51] :

$$\begin{aligned} \psi^1(x, y) &= \phi(x)\psi(y), \\ \psi^2(x, y) &= \psi(x)\phi(y), \\ \psi^3(x, y) &= \psi(x)\psi(y), \end{aligned} \quad (3.19)$$

dont les valeurs sur la grille carrée 2D sont données par la formule :

$$\psi_{j,m,n}^k(x, y) = \frac{1}{2^j} \psi^k \left(\frac{x - 2^j(m + 1/2)}{2^j}, \frac{y - 2^j(n + 1/2)}{2^j} \right), \quad (3.20)$$

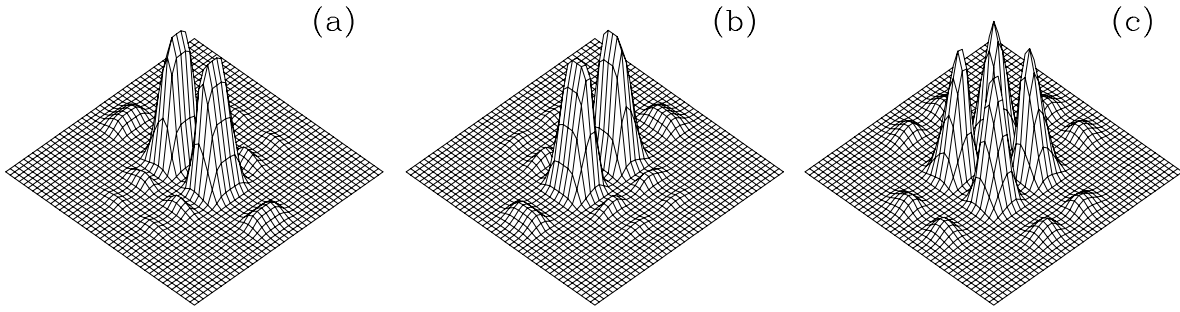


Fig. 3.4 – Transformées de Fourier des trois ondelettes séparables calculées à partir de l'ondelette 1D Daubechies 8 [29] : (a) $\hat{\psi}^1(k_x, k_y)$; (b) $\hat{\psi}^2(k_x, k_y)$; (c) $\hat{\psi}^3(k_x, k_y)$.

où $1 \leq k \leq 3$. D'après l'équation (3.17), la famille d'ondelettes

$$\{\psi_{j,m,n}^1(x, y), \psi_{j,m,n}^2(x, y), \psi_{j,m,n}^3(x, y)\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.21)$$

forme une base orthonormée de \mathbf{W}_j^2 . De l'équation (3.18), on déduit que

$$\{\psi_{j,m,n}^1(x, y), \psi_{j,m,n}^2(x, y), \psi_{j,m,n}^3(x, y)\}_{(j,m,n) \in \mathbb{Z}^3} \quad (3.22)$$

constitue une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

Dans la figure 3.4, nous avons représenté les transformées de Fourier des trois ondelettes séparables calculées à partir de l'ondelette 1D Daubechies 8 [29, 36]. Les coefficients en ondelettes associés à ψ^1 et à ψ^2 sont importants le long de bords qui sont respectivement horizontaux et verticaux. L'ondelette ψ^3 produit plutôt des grands coefficients aux quatre coins de la structure carrée délimitée par ces bords. Notons que dans l'espace de Fourier, l'expression des ondelettes séparables (Éq. (3.19)) implique les factorisations suivantes : $\hat{\psi}^1(k_x, k_y) = \hat{\phi}(k_x)\hat{\psi}(k_y)$, $\hat{\psi}^2(k_x, k_y) = \hat{\phi}(k_y)\hat{\psi}(k_x)$ et $\hat{\psi}^3(k_x, k_y) = \hat{\psi}(k_x)\hat{\psi}(k_y)$.

Cascades \mathcal{W} aléatoires

Soit $\{\psi_{j,m,n}^1, \psi_{j,m,n}^2, \psi_{j,m,n}^3\}$ un ensemble d'ondelettes 2D séparables à support compact qui forme une base orthonormée des fonctions L -périodiques de $L_{\text{per}}^2([0, L]^2)$, avec $L = 2^N$. Ainsi, $\forall f \in L_{\text{per}}^2([0, L]^2)$, on peut écrire f sous la forme :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^N \sum_{m,n=0}^{2^{N-j}-1} \sum_{k=0}^3 c_{j,m,n}^k \psi_{j,m,n}^k(\mathbf{x}), \quad (3.23)$$

où l'ensemble des coefficients $\{c_{j,m,n}^k = \langle \psi_{j,m,n}^k | f \rangle\}$ permettent de caractériser complètement la fonction f . La notion de cascade s'introduit très naturellement à partir de la grille carrée 2D de ces coefficients. La règle de construction ressemble beaucoup à celle définie

sur l'arbre dyadique dans le cas 1D [96, 97, 217–219]. On construit une fonction aléatoire f en affectant les coefficients $\{c_{j,m,n}^k\}$ de manière récursive. Plus précisément, c'est le module

$$d_{j,m,n} = \left([c_{j,m,n}^1]^2 + [c_{j,m,n}^2]^2 + [c_{j,m,n}^3]^2 \right)^{1/2}, \quad (3.24)$$

que l'on calcule à chaque étape suivant la règle de construction suivante :

$$\begin{aligned} d_{j-1,2m,2n} &= M_{j,m,n}^{(r1)} d_{j,m,n}, \\ d_{j-1,2m+1,2n} &= M_{j,m,n}^{(r2)} d_{j,m,n}, \\ d_{j-1,2m,2n+1} &= M_{j,m,n}^{(r3)} d_{j,m,n}, \\ d_{j-1,2m+1,2n+1} &= M_{j,m,n}^{(r4)} d_{j,m,n}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

pour tout j ($1 \leq j \leq N$), m ($0 \leq m < 2^{N-j} - 1$), et n ($0 \leq n < 2^{N-j} - 1$) et où les $M_{j,m,n}^{(ri)}$ sont des variables aléatoires positives indépendantes de même loi $P(M)$. À partir des coefficients $d_{j,m,n}$, on retrouve les coefficients en ondelettes $c_{j,m,n}^k$ ($1 \leq k \leq 3$) en spécifiant les angles θ et φ dans les formules

$$\begin{aligned} c_{j,m,n}^1 &= \cos(\varphi) \cos(\theta) d_{j,m,n}, \\ c_{j,m,n}^2 &= \cos(\varphi) \sin(\theta) d_{j,m,n}, \\ c_{j,m,n}^3 &= \sin(\varphi) d_{j,m,n}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

où $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Pour engendrer une réalisation d'un processus de cascade \mathcal{W} aléatoire, on part de la grande échelle et on attribue une valeur arbitraire au coefficient $d_{N,0,0}$, c'est-à-dire aux coefficients $c_{N,0,0}^k$. On calcule ensuite les coefficients $d_{j,m,n}$ à chaque échelle en itérant l'équation (3.25). À chaque étape et pour chaque réalisation de la variable aléatoire M , on accède aux $c_{j,m,n}$ en choisissant les angles θ et φ aléatoirement et indépendamment dans les intervalles $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ et $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ que nous préciserons plus tard. Dans l'hypothèse où la somme $\sum_{j=0}^N$ dans l'équation (3.23) – qui est en réalité une somme infinie $\sum_{j=-\infty}^N$ – converge, alors la fonction aléatoire f que l'on obtient à la limite, est autosimilaire dans le sens où la loi d'un coefficient $d_{j,m,n}$ à l'échelle 2^j est reliée à celle du coefficient $d_{j',m',n'}$ à l'échelle $2^{j'} > 2^j$ via la multiplication par une variable aléatoire qui ne dépend que du rapport de ces deux échelles :

$$d_{j,m,n} \simeq_l d_{j',m',n'} X_{j'-j}, \quad (3.27)$$

où \simeq_l indique l'égalité en loi et $X_j = \prod_{i=1}^{N-j} M_i$ (les M_i sont des variables aléatoires positives indépendantes qui suivent la même loi que M). Ainsi, d'un point de vue statistique, les détails à l'échelle a sont les mêmes que ceux à l'échelle a' , à un facteur multiplicatif près qui ne dépend que du rapport a'/a .

Remarque

On peut reformuler l'équation (3.25) en prenant le logarithme des deux membres :

$$\begin{aligned}
\ln d_{j-1,2m,2n} &= \ln d_{j,m,n} + \ln M_{j,m,n}^{(r1)}, \\
\ln d_{j-1,2m+1,2n} &= \ln d_{j,m,n} + \ln M_{j,m,n}^{(r2)}, \\
\ln d_{j-1,2m,2n+1} &= \ln d_{j,m,n} + \ln M_{j,m,n}^{(r3)}, \\
\ln d_{j-1,2m+1,2n+1} &= \ln d_{j,m,n} + \ln M_{j,m,n}^{(r4)}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Si M suit une loi log-normale, ces équations correspondent à un processus d'arbre auto-régressif. Ce processus est d'ordre 1, dans le sens où il n'y a qu'un terme qui intervient dans la régression. Nous renvoyons le lecteur au travail de Basseville et de ses collaborateurs [240], pour une introduction aux modèles autorégressifs construits sur un arbre (tel que l'arbre dyadique des bases orthonormales d'ondelettes 1D). Comme Arneodo et ses collaborateurs l'ont déjà fait remarquer dans la Réf. [219], notre approche est très différente de celle de Basseville *et al*, puisque nous nous concentrons principalement sur les propriétés multifractales des réalisations de tels processus et non sur les caractéristiques de l'arbre sous-jacent.

Simulations numériques de cascades \mathcal{W} aléatoires

Cette sous-section présente deux modèles de cascades \mathcal{W} aléatoires : les cascades \mathcal{W} log-normales et les cascades \mathcal{W} log-Poisson. Ce choix particulier s'inspire des processus multiplicatifs infiniment log-divisibles [96, 97, 197–203, 218] récemment proposés comme modèles de cascade d'énergie en turbulence pleinement développée.

Cascades \mathcal{W} log-normales. Commençons par traiter le cas où la variable aléatoire M suit une loi log-normale. Si m et σ^2 sont respectivement la moyenne et la variance de $\ln M$, alors le spectre $\tau(q)$ des surfaces rugueuses engendrées par un tel processus, s'exprime simplement en fonction de ces deux paramètres :

$$\begin{aligned}
\tau(q) &= -\log_2 \langle M^q \rangle - 2, \quad \forall q \in \mathbb{R} \\
&= -\frac{\sigma^2}{2 \ln 2} q^2 - \frac{m}{\ln 2} q - 2,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne d'ensemble. Le spectre des singularités $D(h)$, obtenu par transformation de Legendre de l'équation (3.29), a la forme parabolique suivante :

$$D(h) = -\frac{(h + m/\ln 2)^2}{2\sigma^2/\ln 2} + 2. \tag{3.30}$$

Afin de satisfaire les critères de convergence établis dans le cas 1D [219], nous imposons que les paramètres m et σ^2 satisfassent aux conditions suivantes :

$$m < 0 \quad \text{et} \quad \frac{|m|}{\sigma^2} > 2\sqrt{\ln 2}. \tag{3.31}$$

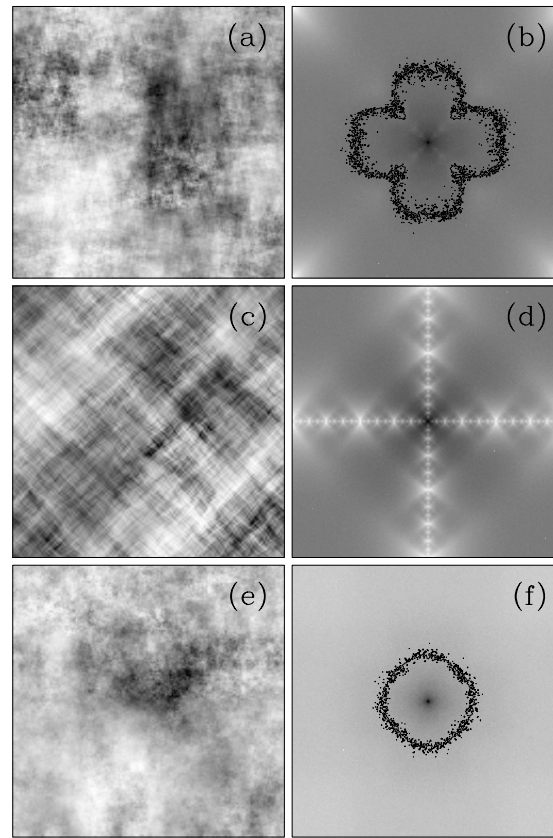


Fig. 3.5 – Trois réalisations de cascades \mathcal{W} log-normales ($n = 10$) avec les paramètres $m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \ln 2$. L'ondelette 1D utilisée est l'ondelette Daubechies 8. (a) Cascade \mathcal{W} sur ψ^1 et ψ^2 . (c) Cascade \mathcal{W} sur ψ^3 . (e) Cascade \mathcal{W} sur ψ^1 , ψ^2 et ψ^3 . Les transformées de Fourier correspondantes sont représentées sur les figures (b), (d) et (f) respectivement. Sur (b) et (f) une courbe de niveau est représentée en points noirs. Les images sont codées du blanc (min) au noir (max).

En résolvant l'équation $D(h) = 0$, on obtient les valeurs h_{\min} et h_{\max} qui délimitent l'étendue du support du spectre des singularités :

$$\begin{aligned} h_{\min} &= -\frac{m}{\ln 2} - \frac{2\sigma}{\sqrt{\ln 2}}, \\ h_{\max} &= -\frac{m}{\ln 2} + \frac{2\sigma}{\sqrt{\ln 2}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

La figure 3.5 représente trois réalisations de cascades \mathcal{W} log-normales correspondant à trois stratégies de distribution des poids des ondelettes ψ^1 , ψ^2 et ψ^3 lors de la construction. Sur cette même figure sont aussi représentées les transformées de Fourier de ces trois images, afin de constater la présence éventuelle d'une anisotropie introduite par la stratégie de construction utilisée. Nous avons fixé les paramètres aux valeurs $m = -0.38 \ln 2$ et

$\sigma^2 = 0.03 \ln 2$. Nous nous sommes limités à dix étapes de construction pour des raisons évidentes de résolution ($L = 1024$).

- (i) Dans la figure 3.5a, nous commençons par fixer les coefficients de la plus grande échelle aux valeurs suivantes :

$$c_{0,0,0}^1 = 1, c_{0,0,0}^2 = 1, c_{0,0,0}^3 = 0. \quad (3.33)$$

À chaque étape de la cascade, nous obtenons le facteur multiplicatif M par tirage aléatoire avec la loi log-normale définie ci-dessus. Nous tirons θ aléatoirement dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ suivant une distribution uniforme alors que l'angle φ est fixé à 0. Une telle cascade se construit donc uniquement sur les poids associés aux ondelettes ψ^1 et ψ^2 . On constate que la transformée de Fourier d'une telle cascade (Fig. 3.5b) présente une anisotropie évidente le long des axes k_x et k_y qui est due à la forme anisotrope des ondelettes ψ^1 et ψ^2 (Figs 3.4a et 3.4b), ainsi qu'à l'absence de composante sur l'ondelette ψ^3 .

- (ii) Dans la figure 3.5c, les coefficients à la plus grande échelle sont fixés aux valeurs suivantes :

$$c_{0,0,0}^1 = 0, c_{0,0,0}^2 = 0, c_{0,0,0}^3 = 1. \quad (3.34)$$

Cette fois, la surface est construite uniquement sur la composante associée à l'ondelette ψ^3 , c'est-à-dire que φ vaut aléatoirement $\pi/2$ ou $-\pi/2$. La surface (Fig. 3.5c) et sa transformée de Fourier (Fig. 3.5d) présentent clairement une texture anisotrope suivant les directions correspondant aux deux diagonales due à la forme particulière de l'ondelette ψ^3 (Fig. 3.4c).

- (iii) Nous allons maintenant essayer d'adapter notre stratégie afin de construire une surface possédant une anisotropie minimum. À cette fin, il est nécessaire d'utiliser simultanément des poids sur les trois ondelettes et de bien choisir leurs proportions. À la plus grande échelle, on fixe les coefficients concernés aux valeurs suivantes :

$$c_{0,0,0}^1 = 1, c_{0,0,0}^2 = 1, c_{0,0,0}^3 = 2^{(-\tau(2)/4+1)}, \quad (3.35)$$

où l'exposant $\tau(2) = \beta - 4$ est choisi suivant la loi de puissance de la densité spectrale désirée. À chaque étape, on choisit aléatoirement θ dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, et φ dans l'intervalle $[-\varphi^*, \varphi^*]$, où φ^* vérifie la relation :

$$\frac{\sin 2\varphi^*}{4\varphi^*} = \frac{2^{\tau(2)/2+3}}{1 + 2^{\tau(2)/2+3}} - \frac{1}{2}, \quad \varphi^* > 0. \quad (3.36)$$

Une image engendrée après dix étapes d'une telle cascade \mathcal{W} est représentée dans la figure 3.5e. Il semble sur cette figure et sur celle de sa transformée de Fourier dans la figure 3.5f, que l'anisotropie ait disparue. Un choix judicieux des rapports entre les différents poids affectés à la grande échelle nous a donc permis d'approcher l'isotropie. Cependant, comme nous le verrons plus tard, une légère anisotropie demeure présente ce qui n'est pas surprenant moyennant la grille carrée 2D qui sert de trame au processus de cascade.

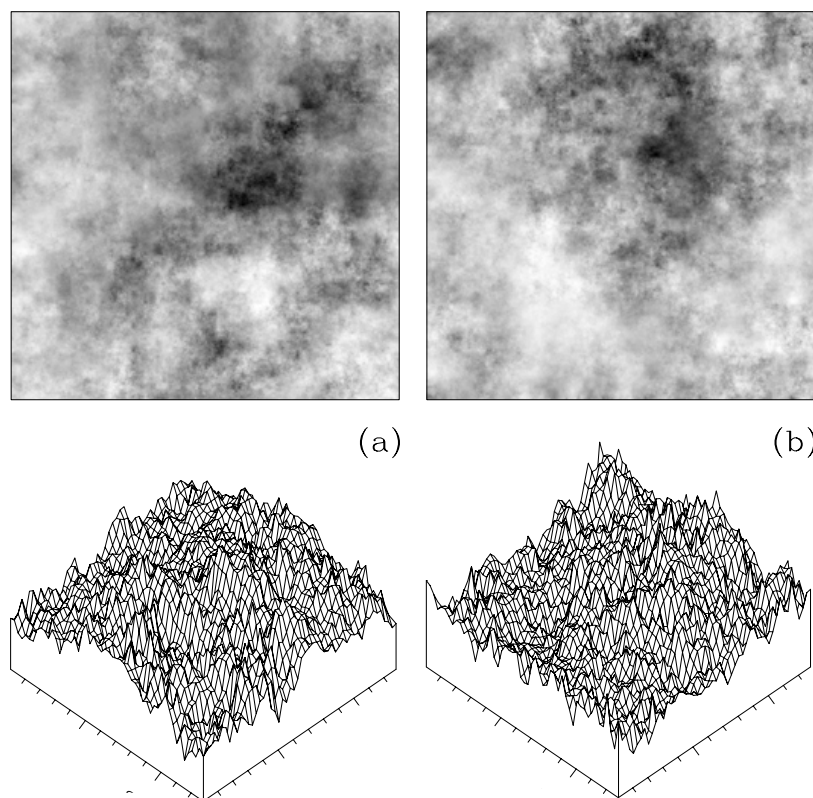


Fig. 3.6 – Surfaces rugueuses multifractales (1024×1024) construites à partir de cascades \mathcal{W} aléatoires ($n = 10$). (a) Cascade log-normale « isotrope » de paramètres $m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \ln 2$. (b) Cascade log-Poisson « isotrope » de paramètres $\gamma = -(1/9) \ln 2$, $\beta = (2/3)^{1/3}$ et $\lambda = 2 \ln 2$. Les images sont codées du blanc (min) au noir (max).

La figure 3.6a illustre une image synthétisée à partir d'une cascade \mathcal{W} log-normale « isotrope » accompagnée d'une représentation 3D de la surface rugueuse correspondante. Le caractère intermittent de cette surface est confirmé dans les figures 3.7a et 3.7b où sont représentés les profils 1D obtenus le long de différentes coupes de l'image précédente. La densité spectrale représentée dans les figures 3.8a et 3.8b suit une loi de puissance dont l'exposant $\beta = \tau(2) + 4 = 2.70$ est très proche de la prédiction théorique.

Cascades \mathcal{W} log-Poisson. Soit λ la moyenne et la variance d'une distribution de Poisson pour la variable aléatoire Y . Considérons que $\ln M$ suit la même loi que $Y \ln \beta + \gamma$, où β et γ sont deux paramètres du modèle. Le spectre $\tau(q)$ des surfaces rugueuses engendrées par un tel processus s'exprime simplement en fonction des trois paramètres λ , β et γ :

$$\tau(q) = \frac{\lambda(1 - \beta^q) - \gamma q}{\ln 2} - 2. \quad (3.37)$$

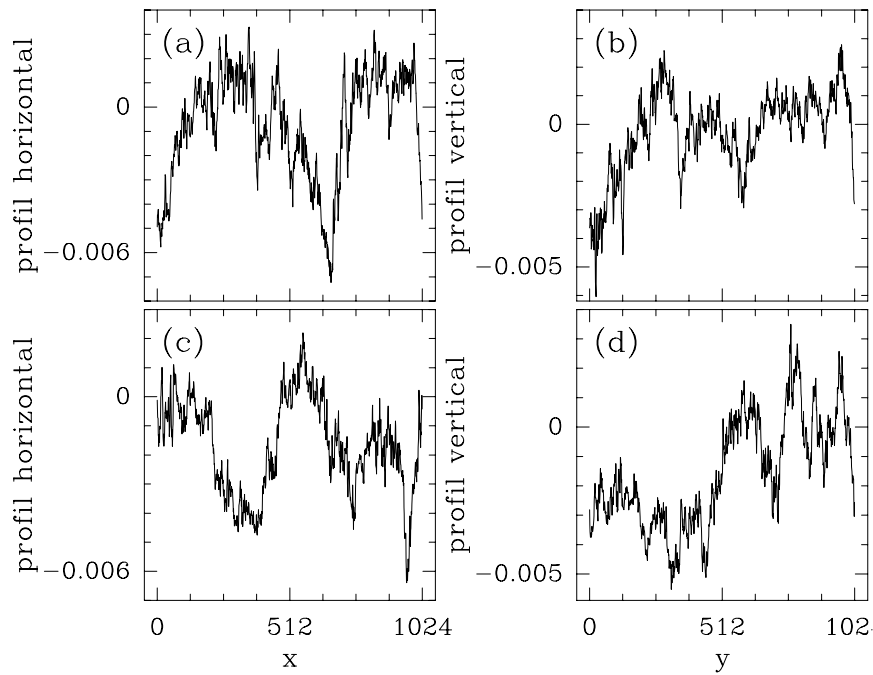


Fig. 3.7 – Profils 1D obtenus respectivement le long de coupes horizontales et de coupes verticales dans les figures 3.6a et 3.6b. Cascade \mathcal{W} log-normale : (a) profil horizontal ; (b) profil vertical. Cascade \mathcal{W} log-Poisson : (c) profil horizontal ; (d) profil vertical.

Le spectre des singularités $D(h)$, obtenu par transformation de Legendre de l'équation (3.37), s'écrit sous la forme analytique suivante :

$$D(h) = \left(\frac{h}{\ln \beta} + \frac{\gamma}{\ln 2 \ln \beta} \right) \left[\ln \left(\frac{h + \gamma / \ln 2}{-(\lambda / \ln 2) \ln \beta} \right) - 1 \right] - \frac{\lambda}{\ln 2} + 2. \quad (3.38)$$

De même que pour les cascades \mathcal{W} log-normales, la non-linéarité du spectre $\tau(q)$ est caractéristique de propriétés multifractales des surfaces rugueuses synthétisées avec le modèle de cascade \mathcal{W} log-Poisson.

La figure 3.6b représente une réalisation d'une surface rugueuse multifractale construite suivant le modèle de cascade \mathcal{W} log-Poisson pour le jeu particulier de paramètres $\gamma = -(1/9) \ln 2$, $\beta = (2/3)^{1/3}$ et $\lambda = 2 \ln 2$. Les figures 3.7c et 3.7d représentent des profils obtenus suivant des coupes 1D de cette surface. On constate qu'il y a une ressemblance très nette entre ces profils et ceux obtenus pour des surfaces rugueuses log-normales. Les figures 3.8c et 3.8d présentent les résultats de l'analyse spectrale de la surface rugueuse log-Poisson illustrée dans la figure 3.6b. Encore une fois le comportement en loi de puissance de la densité spectrale est en parfait accord avec l'exposant théorique $\beta = \tau(2) + 4 = 2.70$. Précisons que, vu le choix particulier des jeux de paramètres pour ces deux types de cascade, il n'est pas surprenant que les valeurs de $\tau(2)$ – et donc les valeurs de β – soient si proches. Ainsi une étude spectrale ne permet pas de distinguer les deux surfaces rugueuses log-normales et log-Poisson illustrées respectivement dans les figures 3.6a et 3.6b. Cette

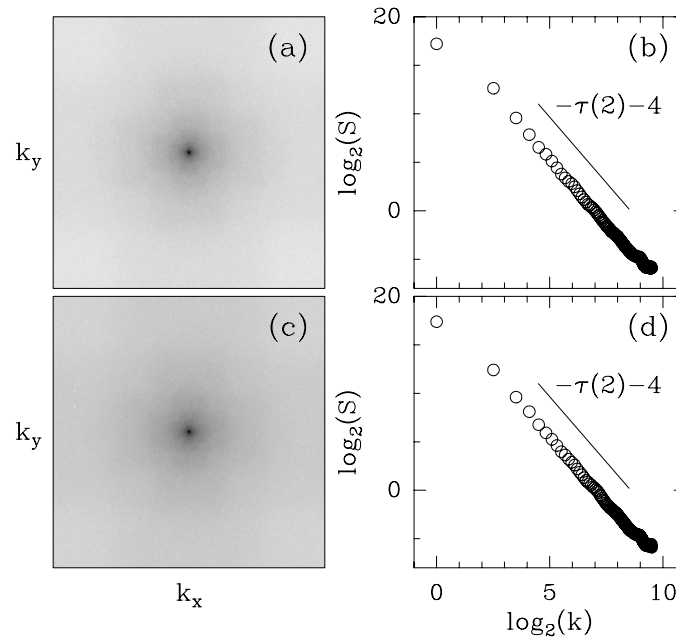


Fig. 3.8 – Analyse spectrale des images (1024×1024) représentées dans les figures 3.6a et 3.6b. Cascade log-normale : (a) $\ln |\hat{f}_{n=10}(\mathbf{k})|$; (b) $S(|\mathbf{k}|)$ en fonction de $|\mathbf{k}|$ dans une représentation logarithmique. Cascade log-Poisson : (a) $\ln |\hat{f}_{n=10}(\mathbf{k})|$; (b) $S(|\mathbf{k}|)$ en fonction de $|\mathbf{k}|$ dans une représentation logarithmique. Les droites correspondent à la prédiction théorique en loi de puissance d'exposant $\beta = \tau(2) + 4 = 2.70$.

remarque n'est pas si surprenante que cela, puisque l'une des limitations majeures de l'analyse spectrale est son incapacité à différencier une surface multifractale d'une surface monofractale. En effet, pour les jeux de paramètres choisis dans cette étude, une surface Brownienne d'index $H = (\tau(2) + 2)/2 = 0.35$ présente exactement le même comportement spectral (voir section 2.5.1, page 81) que les surfaces multifractales engendrées avec nos modèles de cascades \mathcal{W} aléatoires.

Remarque

Comme cela a déjà été débattu dans le cas 1D [219], il n'y a aucune raison pour que toutes les réalisations d'une même fonction stochastique multifractale aient le même spectre des singularités $D(h)$. Chaque réalisation possède sa propre distribution de singularités, et il est primordial de pouvoir relier le spectre des singularités $D(h)$ défini par l'équation (2.58) (page 69) aux prédictions théoriques du spectre statistique données par les équations (3.30) et (3.38). D'après les résultats mathématiques obtenus dans la Réf. [219] pour le cas 1D, le spectre statistique $D(h)$ obtenue par le formalisme multifractal (méthode MMTO) est en fait une borne supérieure pour le spectre des singularités (du moins en ce qui concerne sa partie croissante) de chaque réalisation.

3.3 Application de la méthode MMTO 2D à l'analyse de surfaces rugueuses synthétiques multifractales

Dans cette section, nous appliquons la méthode MMTO 2D à l'étude de surfaces rugueuses multifractales construites à partir des modèles de cascades décrits dans la section précédente. La démarche que nous adoptons suit fidèlement le protocole numérique présenté dans la section 2.4.3 (page 74). Dans un premier temps, nous calculons avec une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$, les transformées en ondelettes de 32 images (1024×1024) de surfaces rugueuses multifractales stochastiques. Nous sélectionnons ensuite les MMMTO de chacune de ces images afin de construire le squelette de chaque transformée en ondelettes. Le calcul des fonctions de partition à partir de l'ensemble de ces squelettes permet finalement d'estimer les spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ (voir section 2.4.1, page 69). Afin de nous assurer de la fiabilité de notre estimation, nous testons systématiquement la robustesse de nos résultats lorsque l'on augmente l'ordre de l'ondelette analysatrice.

3.3.1 Surfaces rugueuses multifractales générées par intégration fractionnaire d'un modèle de cascade singulière

Dans la figure 3.9, nous présentons les résultats du calcul du squelette de la transformée en ondelettes d'une surface rugueuse construite suivant le modèle de cascade singulière intégrée fractionnairement présenté dans la section 3.2.1 [120,122,223,239], pour les valeurs suivantes des paramètres : $p = 0.32$ et $H^* = 0.638$. En toile fond dans la figure 3.9b est illustré le résultat de la convolution de l'image étudiée (Fig. 3.9a) avec le chapeau mexicain comme fonction lissante ϕ_a à l'échelle $a = 2^{2.9}\sigma_W$. On constate que les chaînes de maxima (trait plein) entourent les structures de l'image lissée. Sur ces chaînes, les MMMTO se positionnent aux points indiqués par les symboles (\bullet). Le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ associé aux MMMTO, pointe (\mathcal{A}_ψ) vers la structure correspondante alors que le module \mathcal{M}_ψ est d'autant plus grand que cette structure est importante. L'ensemble des MMMTO calculés aux différentes échelles (Figs 3.9c et 3.9d) permet de construire par chaînage le squelette de la transformée en ondelettes. Les résultats du calcul des fonctions de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ (Éq. (2.59), page 70) en fonction de l'échelle a , sont représentés dans la figure 3.10a dans une représentation logarithmique. Les résultats rapportés correspondent à une moyenne recuite sur 32 images (1024×1024). Pour des valeurs de q comprises entre -4 et 9 , $\log_2(\mathcal{Z}(q, a))$ présente un comportement linéaire relativement bien défini sur les quatre premières octaves, ce qui justifie l'utilisation de la procédure de régression linéaire (droites en trait plein) pour estimer les différents exposants $\tau(q)$. Contrairement au remarquable comportement linéaire du spectre $\tau(q)$ obtenu pour les surfaces rugueuses Browniennes fractionnairement monofractales (Fig. 2.20, page 86), les données (\circ) représentées dans la figure 3.10c exhibent une courbure flagrante caractéristique de la nature multifractale des surfaces étudiées. Le calcul de la dérivée $h = \partial\tau/\partial q$ en chaque point (chaque valeur de q) confirme que l'exposant h dépend de q . On retrouve ce même résultat dans la figure 3.10b où $h(q, a)$ (Éq. (2.66), page 72) est représenté en fonction de $\log_2 a$. Pour la gamme de valeurs de q

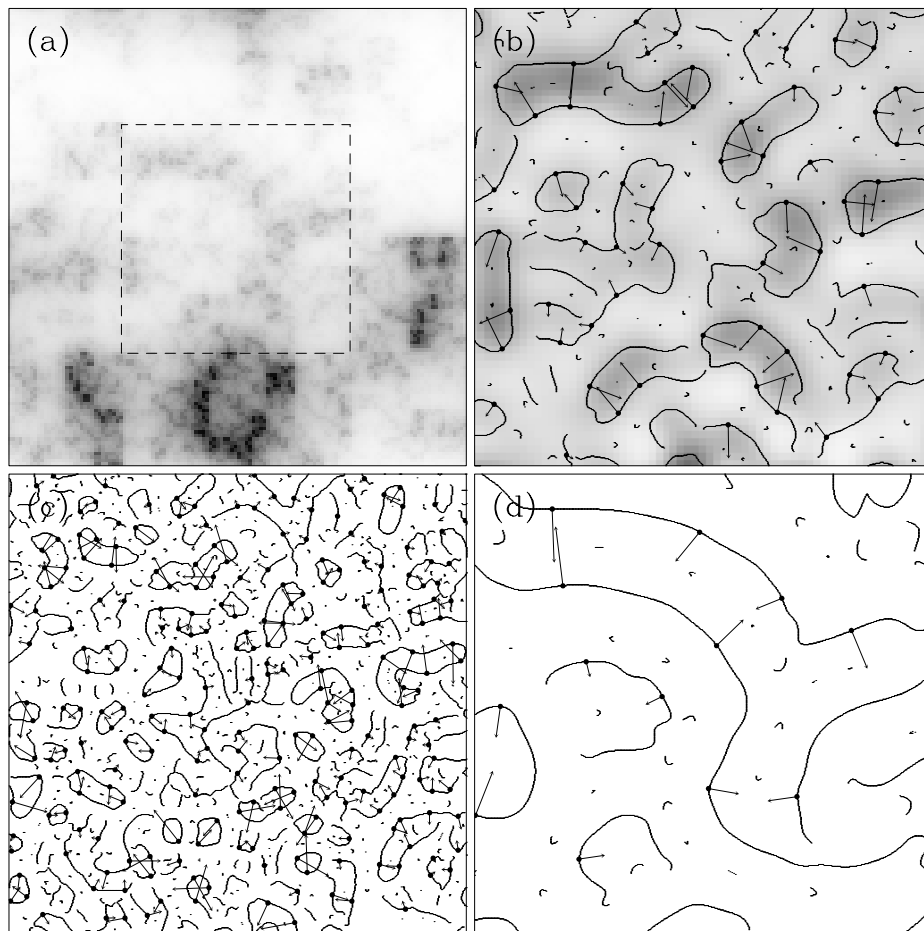


Fig. 3.9 – Analyse en ondelettes 2D d’une surface rugueuse multifractale générée à l’aide du modèle de cascade singulière intégrée fractionnairement ($p = 0.32$, $H^* = 0.628$). ψ est une ondelette d’ordre $n_\psi = 3$ à symétrie radiale (Figs 2.1c et 2.1d, page 49). (a) Image étudiée (1024×1024) codée du blanc (min) au noir (max). Les chaînes de maxima (trait plein) et le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ (flèches) aux MMMTO (\bullet) sont représentés pour les échelles suivantes : $a = 2^{2.9}\sigma_W$ (b), $2^{1.9}\sigma_W$ (c) et $2^{3.9}\sigma_W$ (d) (avec $\sigma_W = 13$ pixels). Le fond dans (b) représente le résultat de la convolution de l’image avec la fonction lissante chapeau mexicain ϕ_a à l’échelle $a = 2^{2.9}\sigma_W$. (b), (c), (d) correspondent à la partie centrale de l’image originale délimitée par le carré en trait interrompu dans (a).

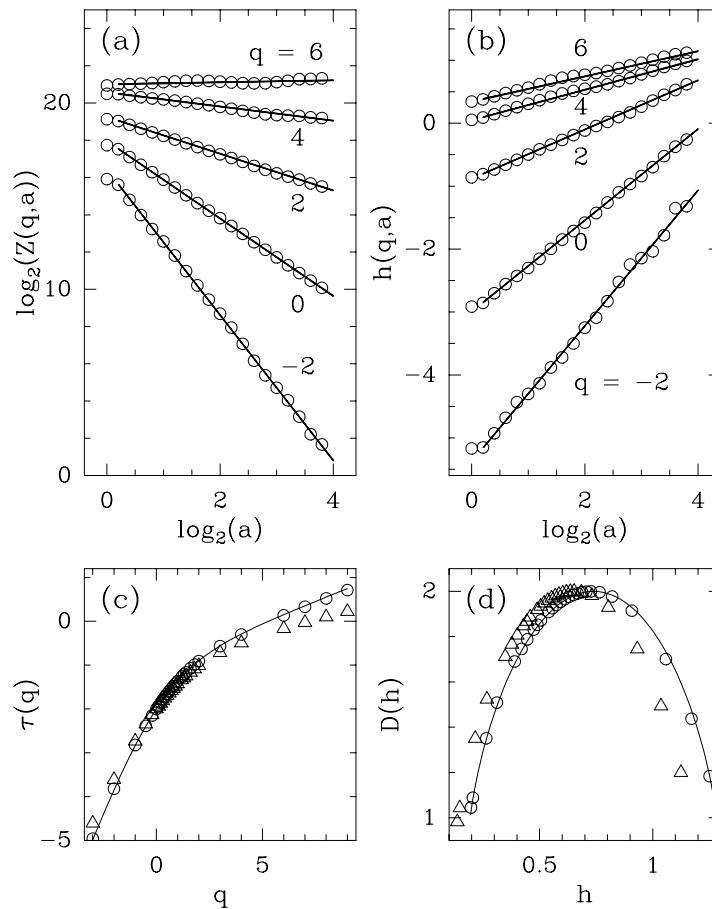


Fig. 3.10 – Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de surfaces rugueuses multifractales générées avec le modèle de cascade singulière intégrée fractionnaire ($p = 0.32$ et $H^* = 0.638$). L'ondelette analysatrice utilisée est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ (Δ) ou d'ordre $n_\psi = 3$ (\circ). (a) $\log_2 Z(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$; les droites en trait plein correspondent à des régressions linéaires des données sur quatre octaves. (b) $h(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$; les droites correspondent à des régressions linéaires des données sur quatre octaves. (c) $\tau(q)$ en fonction de q , obtenu via les pentes des régressions linéaires de la figure (a). (d) $D(h)$ en fonction de h , obtenu par transformation de Legendre des données pour le spectre $\tau(q)$ dans (c). Dans (c) et (d), les traits pleins correspondent aux prédictions théoriques de ces spectres. Ces résultats concernent une moyenne recuite sur 32 images (1024×1024). Les échelles a sont exprimées en unité σ_W .

citée précédemment, $h(q, a)$ présente un comportement linéaire remarquable sur les quatre premières octaves dont on peut extraire une pente $h(q)$ qui dépend clairement de q . En fait, $h(q)$ évolue approximativement entre 0.2 ($q > 0$) et 1.3 ($q < 0$). Le fait que h prenne des valeurs au delà de 1, indique que la fonction étudiée possède des singularités dans sa dérivée première. Toutes ces constatations peuvent être rediscutées et précisées à partir du spectre des singularités $D(h)$ obtenu par transformation de Legendre des exposants $\tau(q)$. La forme en cloche des résultats présentés dans la figure 3.10d est significative d'un comportement multifractal. Pour $q = 0$, la valeur maximum de $D(h)$ est atteinte pour l'exposant $h(q = 0) = 0.74 \pm 0.02$ – valeur en parfait accord avec la prédiction théorique $h(q = 0) = 0.738$ – qui correspond à la singularité la plus présente dans la surface. De plus, la valeur obtenue pour ce maximum $D(h(q = 0) = 0.74) = 2 \pm 0.02$ apporte la preuve expérimentale que la surface rugueuse étudiée est singulière partout. Nous rappelons que, par construction, la dimension fractale du support des singularités de la fonction f correspondante est $D_F = -\tau(0) = 2$. Enfin, la structure en cloche du spectre $D(h)$ ainsi calculé s'étale sur un intervalle conséquent de valeurs de $h \in [0.18, 1.30]$, ce qui confirme que les propriétés d'invariance d'échelle de ces surfaces rugueuses fluctuent d'un point à un autre de la surface.

Dans les figures 3.10c et 3.10d, nous avons représenté pour comparaison les résultats obtenus pour le même échantillon statistique, c'est-à-dire 32 images (1024×1024), mais avec une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ (ϕ est la fonction Gaussienne). Comparativement à l'excellent accord obtenu entre les spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ numériques calculés avec une ondelette d'ordre $n_\psi = 3$ (\circ) et les prédictions théoriques données par les équations (3.37) et (3.38), les résultats numériques obtenus avec une ondelette d'ordre $n_\psi = 1$ (Δ) diffèrent sensiblement de ces spectres théoriques. L'une des raisons de ce désaccord est le fait qu'une ondelette analysatrice d'ordre $n_\psi = 1$ n'est pas la plus adaptée pour détecter des singularités dans les dérivées ($h > 1$) de la fonction étudiée. Le fait que cette fonction possède aussi des singularités fortes d'exposant de Hölder $h \simeq 0$, semble aussi être un handicap pour cette ondelette analysatrice. Pour la classe de surfaces rugueuses multifractales étudiée dans cette section, il est clair, d'après les résultats rapportés dans la figure 3.10, qu'une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 3$ permet de s'affranchir plus efficacement de l'intégration fractionnaire pour mieux révéler la structure multiplicative sous-jacente aux fluctuations de rugosité.

Dans la figure 3.11 nous avons représenté les densités de probabilité du module \mathcal{M}_ψ et de l'argument \mathcal{A}_ψ des MMMTO qui composent le squelette de la transformée en ondelettes. Les figures 3.11a et 3.11b contiennent respectivement les courbes $P_a(\mathcal{M}) = \int d\mathcal{A} P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $P_a(\mathcal{A}) = \int d\mathcal{M} P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ calculées pour quatre échelles différentes. Dans la première de ces figures, on remarque que pour chaque valeur de a , $P_a(\mathcal{M})$ présente un aspect oscillatoire caractéristique du processus de cascade discrète sous-jacent, avec des pics relativement bien définis pour des valeurs de \mathcal{M} dont le rapport est proche de $(1-p)/p = 0.68/0.32 = 2.125$. Dans la figure 3.11b, $P_a(\mathcal{A})$ révèle la présence de quatre angles privilégiés ($\mathcal{A}_\psi = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$) qui correspondent aux deux directions définies par les axes du réseau carré utilisé dans la règle de construction de la cascade. Cette figure indique clairement que la forme de $P_a(\mathcal{A})$ ne dépend absolument pas de l'échelle a ; on note simplement un aspect

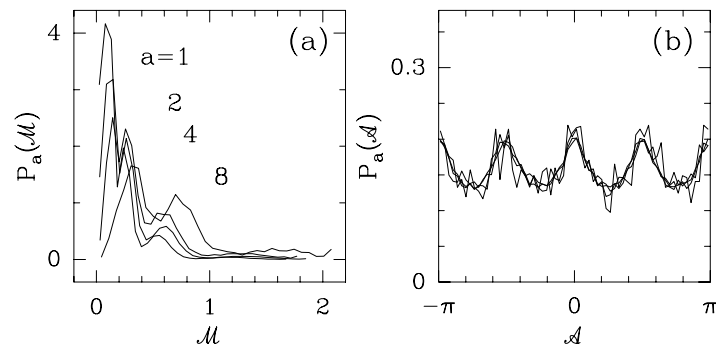


Fig. 3.11 – Pdfs des coordonnées polaires du vecteur gradient associé aux MMMTO de 32 images (1024×1024) de surfaces rugueuses multifractales générées avec le modèle de cascade singulière intégrée fractionnairement ($p = 0.32$ et $H^* = 0.638$), pour les échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M} . (b) $P_a(\mathcal{A})$ en fonction de \mathcal{A} . ψ est l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 3$ illustrée dans les figures 2.1c et 2.1d (page 49).

légèrement plus bruité aux grandes échelles dû à un manque progressif de statistique (le nombre de ligne de maxima dans le squelette diminue comme a^{-2} lorsque l'on monte dans les échelles). L'indépendance dans les échelles de la forme de $P_a(\mathcal{A})$ suggère que cette anisotropie n'affecte pas les propriétés d'invariance d'échelle de ces surfaces rugueuses qui sont donc entièrement déterminées par le comportement du module \mathcal{M}_ψ . Cette observation est confirmée sur la figure 3.12 où les densités de probabilité du module obtenues en conditionnant \mathcal{M}_ψ à différentes valeurs de l'argument \mathcal{A}_ψ , se regroupent quasiment sur une même courbe et ceci pour toutes les échelles examinées. Le léger décalage observé entre les différentes courbes résulte de l'anisotropie précédemment évoquée. Celle-ci se manifeste clairement dans la distribution du vecteur gradient associé aux MMMTO dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) dans la figure 3.13. En effet, on constate dans cette figure que $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ présente des lignes d'iso-valeur (traits pleins) dont la forme « carré » ne dépend pas de l'échelle. Cette observation suggère que cette densité de probabilité obéit à la relation de factorisation : $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = P_a(F(\mathcal{A})\mathcal{M})P_a(\mathcal{A})$, où $F(\mathcal{A})$ est une fonction indépendante de l'échelle qui permet de gommer le décalage observé et de superposer exactement les courbes dans les figures 3.12a et 3.12b. Il est important de remarquer que cette factorisation n'est pas exactement la même que celle donnée par l'équation (2.71) (page 73). Toutefois, par un simple changement de variable ($\mathcal{M}' = F(\mathcal{A})\mathcal{M}$) dans la définition de la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$, on peut sortir la fonction $F(\mathcal{A})$ de l'intégrale de l'équation (2.70) (page 72), et retrouver un comportement en loi de puissance d'exposant $\tau(q)$ indépendant de $F(\mathcal{A})$ et donc de \mathcal{A} . Ceci confirme que les propriétés d'invariance d'échelle des surfaces rugueuses générées par le modèle FISC sont bien isotropes.

Ainsi, l'évolution dans les échelles de $P_a(\mathcal{M})$ caractérise complètement les propriétés multifractales des surfaces étudiées. Dans la figure 3.14 nous illustrons l'incidence de la nature multifractale de ces surfaces sur l'évolution de la forme de $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de l'échelle a . Pour une surface monofractale, comme par exemple les surfaces Browniennes

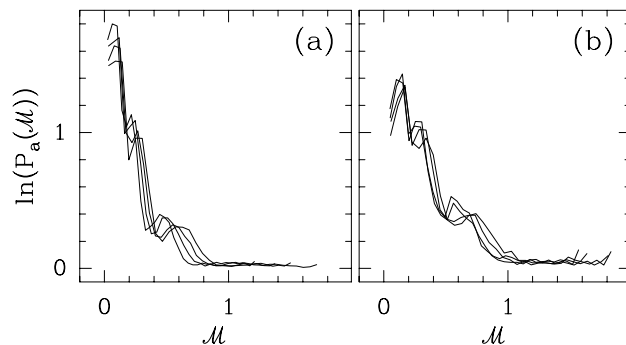


Fig. 3.12 – Pdf du module \mathcal{M}_ψ des MMMTO conditionnée par la valeur de l'argument \mathcal{A}_ψ . (a) $a = 2^{0.1}\sigma_W$; (b) $a = 2^{1.1}\sigma_W$. Les différentes courbes correspondent aux valeurs suivantes de $\mathcal{A}_\psi \pmod{\pi}$: $0 \pm \pi/8$, $\pi/4 \pm \pi/8$, $\pi/2 \pm \pi/8$ et $3\pi/4 \pm \pi/8$. Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.11.

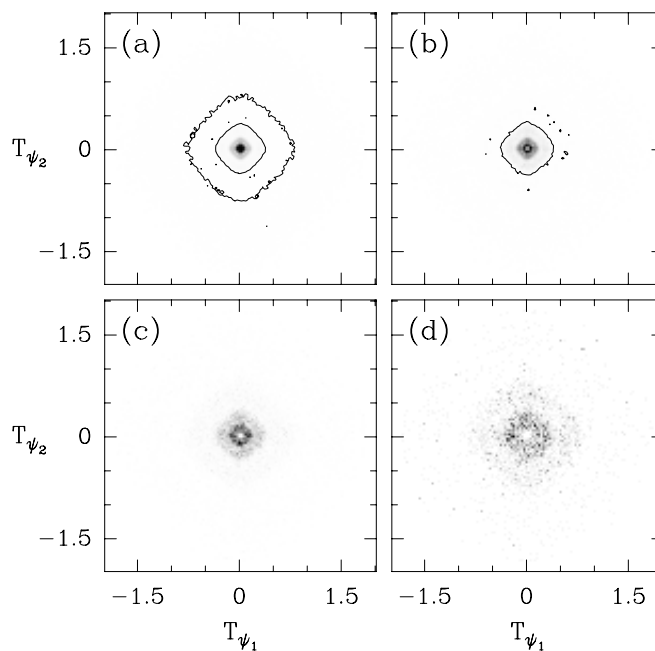


Fig. 3.13 – Représentation dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) de la distribution du vecteur gradient associé aux MMMTO pour les échelles $a = \sigma_W$ (a), $2\sigma_W$ (b), $4\sigma_W$ (c) et $8\sigma_W$ (d). Les courbes en traits pleins correspondent à des lignes d'iso-valeur de $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.11.

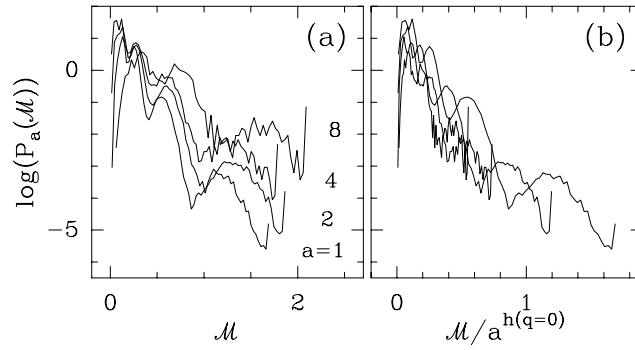


Fig. 3.14 – Pdf du module \mathcal{M}_ψ des MMMTO à différentes échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de \mathcal{M} . (b) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de $\mathcal{M}/a^{h(q=0)}$, avec $h(q=0) = 0.738$. Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.11.

fractionnaires discutées dans la section 2.5 (page 78), nous avons vu que l'existence d'un exposant d'invariance d'échelle unique implique le comportement remarquable suivant :

$$P\left(\mathcal{M}_\psi(\mathcal{L}(a))\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{M}_\psi(\mathcal{L}(a))/a^h\right). \quad (3.39)$$

C'est-à-dire que l'on peut superposer toutes les pdfs du module sur une fonction unique \mathbb{P} indépendante de l'échelle a , dans la mesure où on applique une dilatation suivant \mathcal{M}_ψ d'un facteur $1/a^h$, où h est l'exposant de Hurst de la surface. Dans la figure 3.14b, nous avons dilaté les pdfs du module calculées à différentes échelles dans la figure 3.14a (représentation semi-logarithmique) par un facteur $1/a^{h(q=0)}$, où $h(q=0)$ est l'exposant de Hölder associé à la singularité la plus fréquemment rencontrée dans ces surfaces. Les courbes dilatées sont clairement différentes. En fait, il n'existe pas de valeur de l'exposant h qui permette de remettre toutes les courbes sur une courbe universelle \mathbb{P} . Cette remarque confirme la nature multifractale des données analysées : il n'existe pas un seul exposant d'invariance d'échelle mais tout un continuum correspondant au support du spectre des singularités calculé dans la figure 3.10d.

3.3.2 Surfaces rugueuses multifractales générées par cascades aléatoires sur des bases orthogonales d'ondelettes séparables

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode MMTO 2D à l'étude de surfaces rugueuses multifractales construites à partir des modèles de cascades \mathcal{W} aléatoires sur des bases orthogonales d'ondelettes séparables définis dans la section 3.2.2 (cascades log-normale et log-Poisson). Pour les jeux de paramètres considérés, le support du spectre des singularités $D(h)$ des surfaces rugueuses ainsi générées sera confiné dans l'intervalle $h \in [0, 1]$. Dans notre présentation, nous nous limiterons à décrire les résultats obtenus avec l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ illustrée dans les figures 2.1a et 2.1b ;

en effet, les résultats obtenus avec une ondelette d'ordre $n_\psi = 3$ sont totalement indiscernables des précédents, ce qui atteste de la robustesse de nos estimations par rapport à la forme de l'ondelette analysatrice utilisée.

Cascades \mathcal{W} log-normales

Dans la figure 3.15, nous présentons les résultats du calcul du squelette de la transformée en ondelettes d'une surface rugueuse construite avec le modèle de cascade \mathcal{W} log-normale décrit dans la section 3.2.2. Les paramètres choisis pour cette étude sont les mêmes que ceux utilisés dans la figure 3.6a, c'est-à-dire $m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \ln 2$. Comme pour le modèle FISC dans la section précédente, on constate que les chaînes de maxima (traits pleins) et le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ (flèches) associé aux MMMTO (\bullet) caractérisent parfaitement les structures présentes dans l'image lissée par un filtre gaussien aux échelles considérées. Dans la figure 3.16 sont rapportés les résultats du calcul des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ à partir des squelettes des transformées en ondelettes de 32 images (1024×1024). La figure 3.16a illustre, dans une représentation logarithmique, le comportement de la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ en fonction de a , pour plusieurs valeurs de q ($\mathcal{Z}(q, a)$ est calculée comme une moyenne recuite sur les 32 images). Pour des valeurs de q comprises entre -6 et 8 , $\log_2(\mathcal{Z}(q, a))$ présente, en fonction de $\log_2 a$, un comportement linéaire assez convaincant sur les quatre premières octaves. En effectuant une régression linéaire (trait plein) sur cette gamme d'échelles on obtient, pour chaque valeur de q , une estimation de l'exposant $\tau(q)$. Le spectre $\tau(q)$ ainsi obtenu (\circ) dans la figure 3.16c, est incontestablement non-linéaire, signe que la surface étudiée est multifractale. Remarquons que ce spectre est en parfait accord avec la prédiction théorique donnée par l'équation (3.29), que nous avons représentée en trait plein. De même, le spectre des singularités $D(h)$ numérique suit parfaitement la parabole (trait plein) prédite par l'équation (3.30), et ce, qu'il soit obtenu par transformation de Legendre de $\tau(q)$, ou par calcul des exposants $h(q)$ et $D(q)$ suivant les équations (2.68) et (2.69) (page 72). L'existence d'un spectre continu de valeurs de l'exposant $h(q)$ est confirmée dans la figure 3.16b où $h(q, a)$ se comporte linéairement en fonction de $\log_2 a$ avec une pente h , qui est en parfait accord avec la prédiction théorique $h(q) = \partial\tau/\partial q = -\sigma^2 q / \ln 2 - m / \ln 2$. L'équation (3.32) prévoit les bornes suivantes : $h_{\min} = 0.034$ et $h_{\max} = 0.726$, pour le support du spectre des singularités. Cependant, les capacités de calcul dont nous disposons ne permettent pas d'accéder à ces valeurs extrêmes de l'exposant de singularité. La caractérisation des singularités les plus fortes et les plus faibles exige, en effet, de pouvoir calculer $\tau(q)$ pour des valeurs de $|q|$ bien supérieures à celles considérées ici. De tels calculs nécessitent un échantillon statistique beaucoup plus important que 32 images (1024×1024). Notons que l'exposant de Hölder le plus présent dans ces surfaces rugueuses multifractales $h(q=0) = 0.38 \pm 0.01$ correspond à une dimension fractale, $D(h(q=0)) = 2.00 \pm 0.02$, ce qui confirme que ces surfaces sont singulières en tout point.

Intéressons nous maintenant à l'évolution de la densité de probabilité $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ en fonction des échelles. D'après la règle de construction des cascades \mathcal{W} aléatoires (section 3.2.2), on s'attend à ce que cette densité de probabilité factorise : $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = P_a(\mathcal{M})P_a(\mathcal{A})$. Les

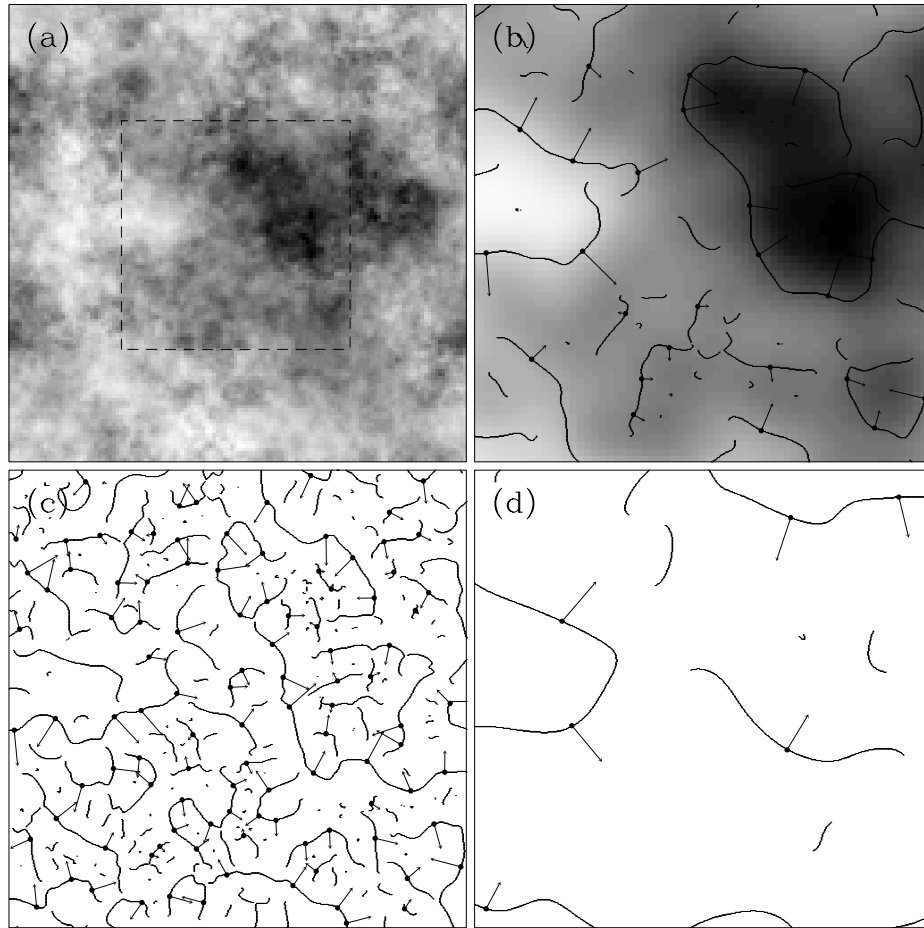


Fig. 3.15 – Analyse en ondelettes 2D d’une surface rugueuse multifractale générée à l’aide du modèle de cascades \mathcal{W} log-normales. Mêmes valeurs des paramètres que dans la figure 3.6a. ψ est une ondelette isotropes d’ordre $n_\psi = 1$ (Figs 2.1a et 2.1b, page 49). (a) Image étudiée (1024×1024) codée du blanc (min) au noir (max). Les chaînes de maxima (trait plein) et le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ (flèche) aux MMMTO (\bullet) sont représentés pour les échelles suivantes : $a = 2^{2.9}\sigma_W$ (b), $a = 2^{1.9}\sigma_W$ (c) et $a = 2^{3.9}\sigma_W$ (d) (avec $\sigma_W = 13$ pixels). Le fond en nuances de gris dans (b) représente le résultat de la convolution de l’image avec la fonction lissante gaussienne ϕ_a à l’échelle $a = 2^{2.9}\sigma_W$. (b), (c) et (d) correspondent à la partie centrale de l’image originale délimitée par un carré en trait interrompu dans (a).

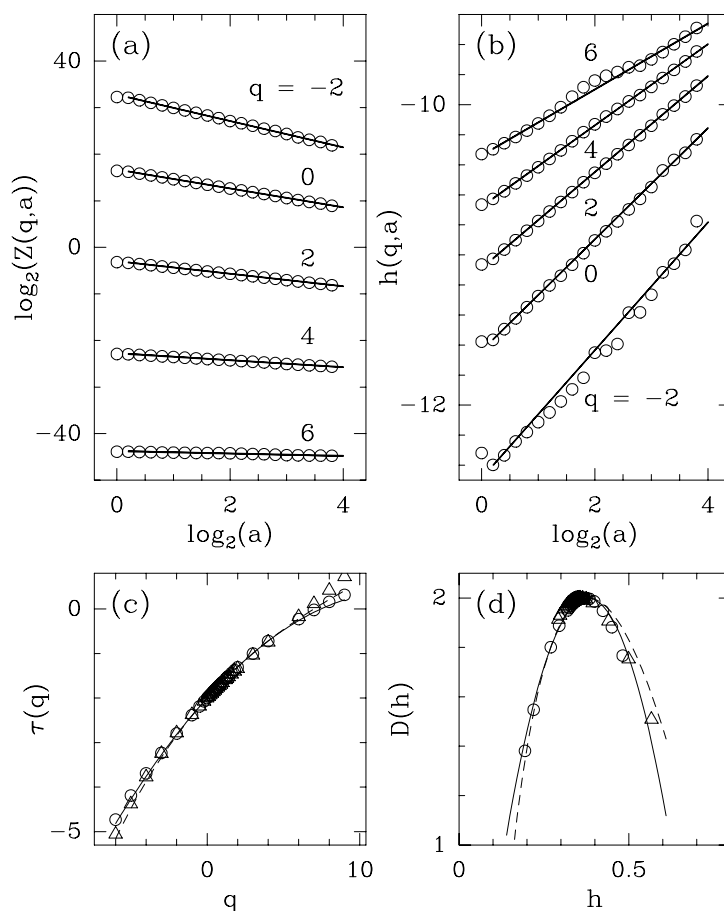


Fig. 3.16 – Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de surfaces rugueuses multifractales générées avec les modèles de cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales (o) et les modèles de cascades \mathcal{W} aléatoires log-Poisson (Δ). Mêmes valeurs des paramètres que dans la figure 3.6. L'ondelette analysatrice utilisée est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. (a) $\log_2 Z(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$; les droites en trait plein correspondent à des régressions linéaires des données sur quatre octaves. (b) $h(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$; les droites correspondent à des régressions linéaires des données sur quatre octaves. (c) $\tau(q)$ en fonction de q , obtenu via les pentes des régressions linéaires de la figure (a). (d) $D(h)$ en fonction de h , obtenu par transformation de Legendre des données pour le spectre $\tau(q)$ dans (c). Dans (c) et (d) les traits pleins correspondent aux prédictions théoriques des spectres de la cascade \mathcal{W} log-normale (Éqs. (3.29) et (3.30)); les traits interrompus correspondent aux prédictions théoriques des spectres de la cascade \mathcal{W} log-Poisson (Éqs. (3.37) et (3.38)). Ces résultats concernent des moyennes recuites sur 32 images (1024×1024) de chaque modèle. Les échelles a sont exprimées en unité σ_W .

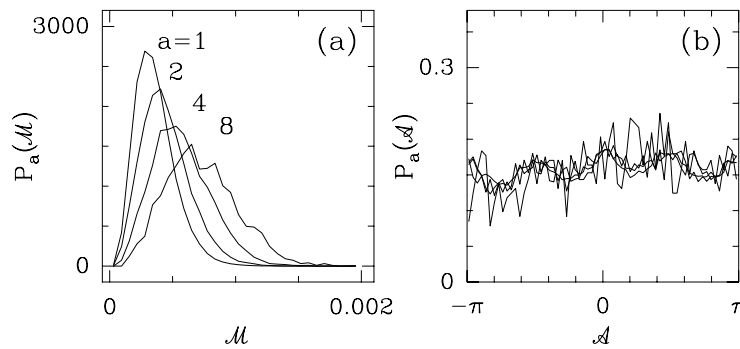


Fig. 3.17 – Pdfs des coordonnées polaires du vecteur gradient associé aux MMTTO de 32 images (1024×1024) de surfaces rugueuses multifractales générées avec le modèle de cascades \mathcal{W} log-normales ($m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \ln 2$), pour les échelles $a = \sigma_W$, $2\sigma_W$, $4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M} . (b) $P_a(\mathcal{A})$ en fonction de \mathcal{A} . ψ est l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$.

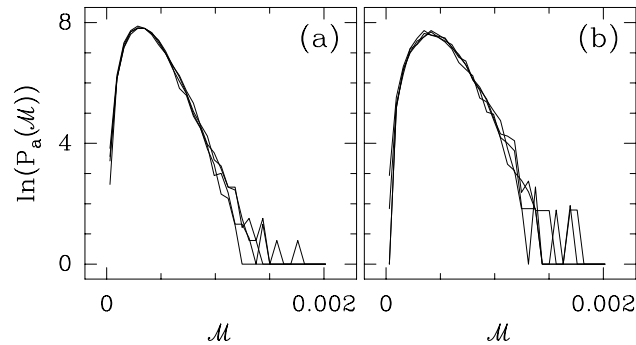


Fig. 3.18 – Pdf du module \mathcal{M}_ψ des MMTTO conditionnée par la valeur de l'argument \mathcal{A}_ψ . (a) $a = 2^{0.1}\sigma_W$; (b) $2^{1.1}\sigma_W$. Les différentes courbes correspondent aux valeurs suivantes de $\mathcal{A}_\psi \pmod{\pi}$: $0 \pm \pi/8$, $\pi/4 \pm \pi/8$, $\pi/2 \pm \pi/8$ et $3\pi/4 \pm \pi/8$. Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.17.

distributions $P_a(\mathcal{M})$ et $P_a(\mathcal{A})$ sont respectivement représentées sur les figures 3.17a et 3.17b. Le découplage de \mathcal{M}_ψ et de \mathcal{A}_ψ est vérifié numériquement dans les figures 3.18a et 3.18b, où pour deux valeurs de l'échelle a , les distributions obtenues en conditionnant \mathcal{M}_ψ par la valeur de l'argument \mathcal{A}_ψ , se superposent remarquablement sur une courbe unique. Ainsi l'étude des propriétés multifractales des surfaces rugueuses log-normales se résume à l'analyse de l'évolution de la forme de $P_a(\mathcal{M})$ (Fig. 3.17a), sans se soucier de la faible anisotropie mise en évidence par les légères oscillations observées dans $P_a(\mathcal{A})$ (Fig. 3.17b). Ces oscillations proviennent de la nature orientée du réseau carré sur lequel est défini l'arbre de la construction des cascades \mathcal{W} . Il est important de remarquer que $P_a(\mathcal{A})$ n'évolue pas dans les échelles, ce qui confirme que les propriétés d'invariance d'échelle ne dépendent absolument pas de l'argument \mathcal{A}_ψ . Ceci permet de justifier de façon définitive l'utilisation exclusive de \mathcal{M}_ψ pour caractériser statistiquement les fluctuations de rugosité des surfaces engendrées

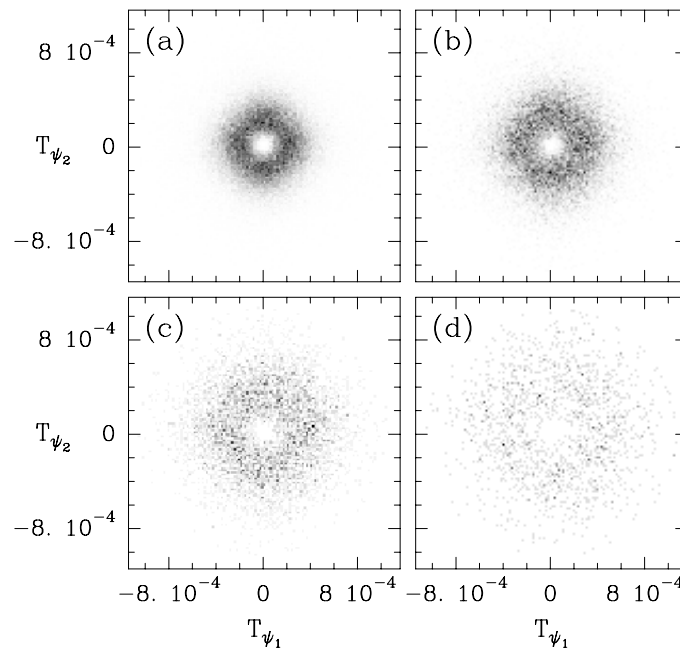


Fig. 3.19 – Représentation dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) de la distribution du vecteur gradient associé aux MMMTO pour les échelles $a = \sigma_W$ (a), $2\sigma_W$ (b), $4\sigma_W$ (c) et $8\sigma_W$ (d). Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.17.

par le modèle de cascades \mathcal{W} log-normales. La figure 3.19 illustre la distribution du vecteur gradient associé aux MMMTO dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) . Cette figure recoupe les conclusions après examen des figures 3.17b et 3.18 : malgré une légère anisotropie, accentuée par le manque de statistique dans certaines directions, la forme de $P_a(\mathcal{M})$ ne dépend pas de façon significative de la direction considérée. Tout ceci confirme donc l’isotropie des propriétés d’invariance d’échelle.

Un autre moyen de mettre en évidence la multifractalité du modèle étudié est de démontrer la non validité de l’équation (3.39). Dans la figure 3.20b, nous avons dilaté les pdfs du module \mathcal{M}_ψ calculées à différentes échelles dans la figure 3.20a (représentation semi-logarithmique) par un facteur $1/a^{h(q=0)}$, où $h(q=0) = 0.38$ est l’exposant de Hölder de la singularité la plus fréquemment rencontrée dans ces surfaces rugueuses log-normales. Même si cela n’est pas spectaculaire, il est net que les queues des pdfs dilatées ne se superposent pas comme cela serait le cas pour n’importe quelle surface monofractale d’exposant de Hurst unique égal à 0.38. Il est important de mentionner que même en jouant sur la valeur de l’exposant h , il n’est pas possible de superposer ces pdfs. Ceci est la conséquence directe de l’existence d’un continuum de valeurs de l’exposant d’invariance d’échelle.

Cascades \mathcal{W} log-Poisson

Afin de tester la fiabilité et l’efficacité de notre méthodologie, nous avons à nouveau appliqué la méthode MMTTO 2D sur un échantillon de 32 images (1024×1024) de surfaces

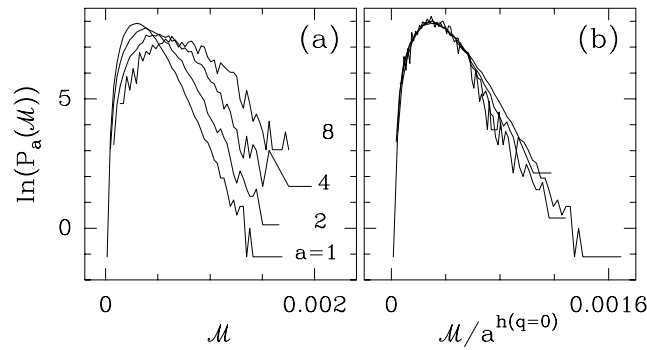


Fig. 3.20 – Pdfs du module \mathcal{M}_ψ des MMTO à différentes échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de \mathcal{M} . (b) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de $\mathcal{M}/a^{h(q=0)}$ avec $h(q=0) = 0.38$. Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.17.

générées cette fois par le modèle de cascades \mathcal{W} log-Poisson décrit dans la section 3.2.2. Les paramètres choisis pour cette étude sont les mêmes que ceux de la figure 3.6b, c'est-à-dire $\gamma = -(1/9)\ln 2$, $\beta = (2/3)^{1/3}$ et $\lambda = 2\ln 2$. Dans les figures 3.16c et 3.16d, nous avons représenté les spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ obtenus (Δ), afin de pouvoir les comparer avec ceux de la cascade log-normale. Les traits interrompus correspondent aux prédictions théoriques de ces spectres (Éqs (3.37) et (3.38)). Pour les valeurs de q comprises entre -6 et 6 , les données expérimentales se positionnent remarquablement sur les courbes théoriques. On constate que pour $q \in [-4, 6]$ il est très difficile de distinguer les spectres des deux modèles de cascades, tant au niveau des données numériques qu'au niveau des prédictions théoriques. Nous avons, en effet, choisi volontairement les paramètres des cascades log-normales et log-Poisson afin d'obtenir cette ressemblance sur une plage importante de valeurs de q . Notre intention est de mettre l'accent sur le fait que, très souvent, il est nécessaire d'accéder à de grandes valeurs de $|q|$ si l'on veut sans ambiguïté distinguer deux modèles. Or, comme nous l'avons vu dans le cas des surfaces Browniennes fractionnaires, le calcul des spectres multifractals pour de grandes valeurs de $|q|$ nécessite un échantillon statistique de plus en plus important. Ainsi, même si l'on commence à percevoir une séparation des spectres des deux modèles pour $q < -3$ ou $q > 6$, il nous est impossible de distinguer le modèle log-Poisson de son approximation log-normale pour le nombre d'images (32) analysées. Cette constatation n'est pas une limitation propre à la méthode MMTO 2D, car à partir d'un même échantillon statistique, aucune méthode d'analyse fractale n'est suffisamment puissante pour surmonter les problèmes de convergence statistique. Toutefois, nous aurions pu choisir un jeu de paramètres pour la cascade log-Poisson tel que le spectre $\tau(q)$ diffère significativement d'une forme parabolique bien que restant très proche du spectre de la cascade log-normale autour de $q = 0$, et en particulier en $q = 0, 1$ et 2 , valeurs pour lesquelles il est possible de mesurer $\tau(q)$ par d'autres méthodes (voir section 2.4.1, page 71). Dans ce cas la méthode MMTO 2D est à notre connaissance le seul outil qui permette de distinguer ces deux modèles via la mesure du spectre $\tau(q)$ sur une plage raisonnable ($q \in [-4, 6]$) de valeurs de q .

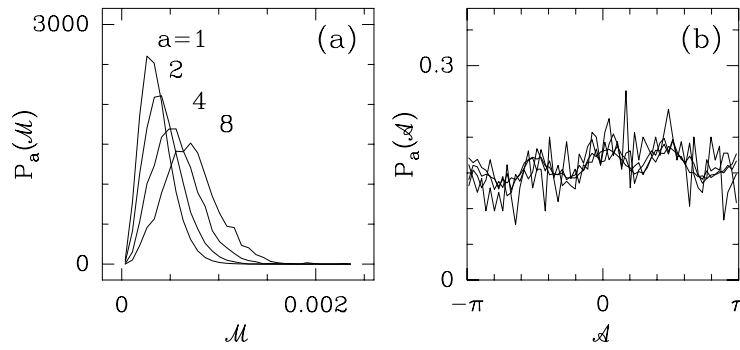


Fig. 3.21 – Pdfs des coordonnées polaires du vecteur gradient associé aux MMTTO de 32 images (1024×1024) de surfaces rugueuses multifractales générées avec le modèle de cascade \mathcal{W} log-Poisson ($\gamma = -(1/9) \ln 2$, $\beta = (2/3)^{1/3}$ et $\lambda = 2 \ln 2$), pour les échelles $a = \sigma_W$, $2\sigma_W$, $4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M} . (b) $P_a(\mathcal{A})$ en fonction de \mathcal{A} . ψ est l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$.

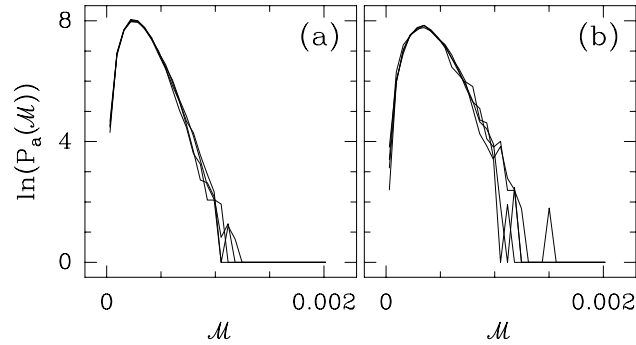


Fig. 3.22 – Pdf du module \mathcal{M}_ψ des MMTTO conditionnée par la valeur de l'argument \mathcal{A}_ψ . (a) $a = 2^{0.1}\sigma_W$; (b) $2^{1.1}\sigma_W$. Les différentes courbes correspondent aux valeurs suivantes de $\mathcal{A}_\psi \pmod{\pi}$: $0 \pm \pi/8$, $\pi/4 \pm \pi/8$, $\pi/2 \pm \pi/8$ et $3\pi/4 \pm \pi/8$. Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.21.

Les résultats de l'étude des pdfs de \mathbf{T}_ψ pour plusieurs valeurs du paramètre d'échelle et pour des représentations différentes sont représentés dans les figures 3.21, 3.22 et 3.23. Ces pdfs sont très proches de celles obtenues avec les cascades log-normales; on peut donc tirer exactement les mêmes conclusions que précédemment (voir plus haut). Cela n'est pas surprenant vu la remarque sur la similitude entre ces deux modèles pour les jeux de paramètres choisis. La figure 3.24, qui est à comparer avec la figure 3.20, illustre la multifractalité du modèle log-Poisson : il n'existe pas une valeur de h unique qui permette, par dilatation de \mathcal{M}_ψ d'un facteur $1/a^h$, de superposer les pdfs calculées à différentes échelles. Cette observation confirme l'existence d'un continuum de valeurs de h . Le spectre des singularités $D(h)$ quantifie les contributions relatives des singularités correspondantes dans les fonctions multifractales ainsi synthétisées

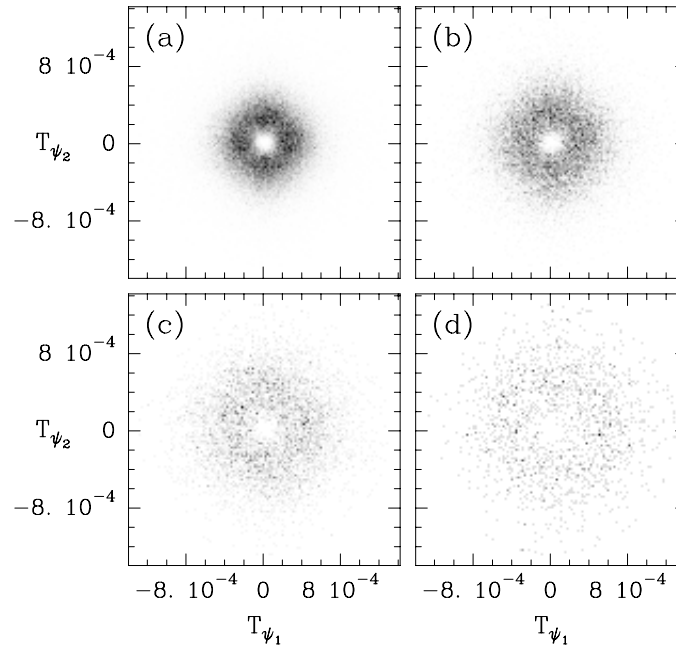


Fig. 3.23 – Représentation dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) de la distribution du vecteur gradient associé aux MMMTO pour les échelles $a = \sigma_W$ (a), $2\sigma_W$ (b), $4\sigma_W$ (c) et $8\sigma_W$ (d). Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.21.

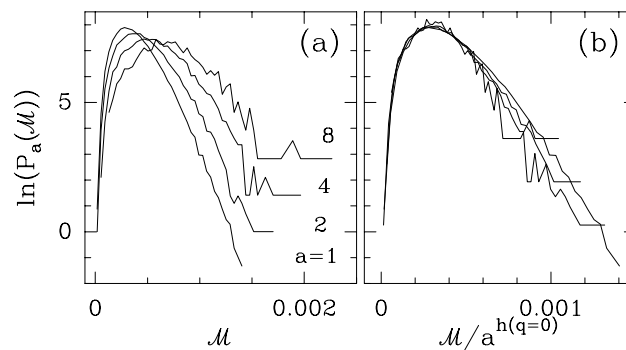


Fig. 3.24 – Pdfs du module \mathcal{M}_{ψ} des MMMTO à différentes échelles $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de \mathcal{M} . (b) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de $\mathcal{M}/a^{h(q=0)}$ avec $h(q=0) = -(\gamma/\ln 2 + \lambda \ln \beta/\ln 2) = 0.381$. Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.21.

3.4 Calcul du noyau d'autosimilarité de surfaces rugueuses multifractales à partir du squelette de la transformée en ondelettes 2D.

Comme nous venons de le voir, dans le cas multifractal, une simple dilatation des valeurs de \mathcal{M}_ψ mettant en jeu un exposant d'invariance d'échelle unique ne permet pas de prédire la forme de la pdf à une échelle donnée à partir de la connaissance de cette pdf à une autre échelle. Afin de rendre possible cette prédiction, et donc de comprendre l'évolution de la distribution statistique du module \mathcal{M}_ψ dans les échelles, il est nécessaire d'avoir recours à une opération plus élaborée sur ces pdfs. Cette section présente la généralisation à 2D de la méthode du noyau d'autosimilarité G introduit par Castaing et ses collaborateurs [201, 224–230], dans le contexte de l'analyse des pdfs des incréments du champ de vitesse en turbulence pleinement développée. Une généralisation de cette approche aux pdfs des maxima du module de la transformée en ondelettes a été récemment proposée par Arneodo et ses collaborateurs [96, 97, 100, 218, 235]. Dans ce chapitre, nous allons nous baser sur les acquis de cette première expérience effectuée sur des signaux 1D, pour étendre cette approche de 1D à 2D afin de mettre en œuvre des logiciels d'analyse d'images de surfaces rugueuses multifractales. À cette fin, nous partons de l'hypothèse de travail que les densités de probabilité $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ des gradients \mathbf{T}_ψ factorisent :

$$P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = P_a(\mathcal{M})P_a(\mathcal{A}). \quad (3.40)$$

Le fait d'imposer que \mathcal{M}_ψ et \mathcal{A}_ψ soient statistiquement indépendants, nous permet de nous concentrer sur le comportement dans les échelles du module \mathcal{M}_ψ , laissant de côté la possibilité que l'argument \mathcal{A}_ψ intervienne dans le calcul du noyau d'autosimilarité G . L'étude d'un noyau prenant en compte une éventuelle contribution angulaire ouvre la porte à la caractérisation de propriétés d'invariance d'échelle anisotropes qui peuvent apparaître dans telle ou telle surface. Cette éventualité est laissée de côté dans ce travail car elle mérite de faire l'objet d'une étude spécifique approfondie qui va bien au-delà des objectifs que nous nous sommes fixés dans cette thèse. Comme nous l'avons mentionné et vérifié dans la section précédente, l'hypothèse (3.40) est vérifiée par construction dans le cas des modèles de cascades \mathcal{W} log-normales et log-Poisson. Cette hypothèse de factorisation semble être tout à fait raisonnable dans de nombreuses situations expérimentales.

3.4.1 Méthode de calcul du noyau d'autosimilarité

Considérons comme point de départ que l'hypothèse (3.40) est vérifiée. Dans ces conditions, on peut étendre l'approche de Castaing *et al* [201, 224] en suivant la démarche décrite dans les Réfs [96, 97, 218] et qui consiste à exploiter la décomposition espace-échelles fournie par le squelette de la transformée en ondelettes. De par la nature multiplicative du processus étudié, on peut exprimer la pdf du module des MMMTO à une échelle donnée comme étant

la somme pondérée de versions dilatées de cette même pdf calculée à une autre échelle $a' > a$:

$$P_a(\mathcal{M}) = \int G_{aa'}(u) P_{a'}(e^{-u}\mathcal{M}) e^{-u} du, \quad \text{pour } a' > a. \quad (3.41)$$

Pour toute suite décroissante d'échelles $\{a_1, \dots, a_n\}$, le noyau G obéit à la loi de composition :

$$G_{a_n a_1} = G_{a_n a_{n-1}} \star \dots \star G_{a_2 a_1}, \quad (3.42)$$

où \star représente le produit de convolution. D'après Castaing *et al* [201, 224], une cascade est *autosimilaire*, s'il existe une suite décroissante d'échelles $\{a_n\}$ telle que $G_{a_n a_{n-1}} = G$, où G est indépendant de n . La cascade est *continûment autosimilaire* [201, 224], s'il existe une fonction $s(a)$ positive et décroissante telle que $G_{aa'}$ dépend de a et de a' uniquement par l'intermédiaire de $s(a, a') = s(a) - s(a')$, c'est-à-dire que l'on peut exprimer ce noyau sous la forme : $G_{aa'}(u) = G(u, s(a, a'))$. En fait, $s(a, a')$ représente le nombre d'étapes élémentaires de la cascade pour passer de l'échelle a' à l'échelle a et $s(a)$ peut être vue comme le nombre d'étapes pour aller de l'échelle « intégrale » L à l'échelle a considérée. D'après l'équation (1.5) (page 3), on peut exprimer l'équation (3.42) comme un produit dans l'espace de Fourier :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = \hat{G}(p)^{s(a, a')}, \quad \text{pour } a' > a. \quad (3.43)$$

De cette équation, il ressort que \hat{G} est la fonction caractéristique d'une densité de probabilité infiniment divisible. Une telle cascade est appelée *cascade log-infiniment divisible* [197, 199, 201]. D'après la définition de Novikov [197, 199], la cascade est *invariante d'échelle* si :

$$s(a, a') = \ln \left(\frac{a'}{a} \right), \quad (3.44)$$

c'est-à-dire si $s(a) = \ln(L/a)$.

L'estimation numérique de G [96, 97] passe par le calcul de la fonction caractéristique $M(p, a)$ associée aux MMTTO appartenant au squelette de la transformée en ondelettes à l'échelle a [129] :

$$M(p, a) = \int e^{ip \ln \mathcal{M}} P_a(\mathcal{M}) d\mathcal{M}. \quad (3.45)$$

En utilisant l'équation (3.41), on en déduit que \hat{G} doit vérifier la relation :

$$M(p, a) = \hat{G}_{aa'}(p) M(p, a'). \quad (3.46)$$

On peut donc estimer le noyau reliant les statistiques de \mathcal{M}_ψ à deux échelles différentes par l'intermédiaire des fonctions caractéristiques calculées à ces deux échelles :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = \frac{M(p, a)}{M(p, a')}. \quad (3.47)$$

L'estimation numérique de la fonction caractéristique à chaque échelle s'obtient à partir du calcul séparé des moyennes $\langle \cos(p \ln \mathcal{M}) \rangle$ (partie réelle de M) et $\langle \sin(p \ln \mathcal{M}) \rangle$ (partie imaginaire) sur le squelette de la transformée en ondelettes.

3.4.2 Estimation du noyau d'autosimilarité de surfaces rugueuses générées par des modèles de cascades \mathcal{W} aléatoires.

Cette sous-section est consacrée à la validation de la méthode de calcul du noyau d'autosimilarité décrite ci-dessus. À cette fin nous allons l'appliquer sur les cas d'école que sont les modèles de cascades \mathcal{W} log-normales et log-Poisson présentés dans la section 3.2.2.

Mise en évidence d'une cascade continûment autosimilaire

Dans un premier temps, nous nous proposons de tester la validité de l'équation (3.43). À cette fin, nous calculons le logarithme du module $\ln |\hat{G}_{aa'}|$ et l'argument $\Phi_{aa'}$ de $\hat{G}_{aa'}$ suivant l'équation (3.47). Dans les figures 3.25a et 3.25c, nous avons représenté ces deux grandeurs pour un échantillon statistique de 32 images (1024×1024) de surfaces générées à l'aide du modèle de cascades \mathcal{W} log-normales, et pour plusieurs couples d'échelles (a, a') . Dans les figures 3.25b et 3.25d, nous avons réussi à superposer toutes ces données sur une même forme pour le noyau $\hat{G}(p) = \hat{G}_{aa'}^{1/s(a, a')}$, où $s(a, a') = \ln(a'/a)$. Ces figures apportent donc la preuve de la pertinence du comportement prédit par les équations (3.43) et (3.44), et nous permettent bien de retrouver les propriétés d'invariance d'échelle et d'autosimilarité du modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales. Notons que pour des valeurs de $|p|$ plus grande que 5, les différentes courbes expérimentales commencent à s'éloigner de leur comportement commun. Cela reflète simplement le fait que nos calculs commencent à être sérieusement affectés par les problèmes de convergence statistique. Comme l'illustrent les résultats rapportés dans la figure 3.27, les mêmes observations peuvent être faites dans le cas des surfaces rugueuses générées par le modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires log-Poisson.

Comparaison du noyau log-normal et du noyau log-Poisson

Maintenant que nous avons validé l'équation (3.43), nous pouvons nous intéresser plus précisément à la forme du noyau G afin de tenter de distinguer le cas log-Poisson de son approximation log-normale. Pour cela décomposons $\ln \hat{G}$ en série de Taylor [96, 97] :

$$\hat{G}(p) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(ip)^k}{k!} \right). \quad (3.48)$$

L'équation (3.43) devient :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} s(a, a') c_k \frac{(ip)^k}{k!} \right), \quad (3.49)$$

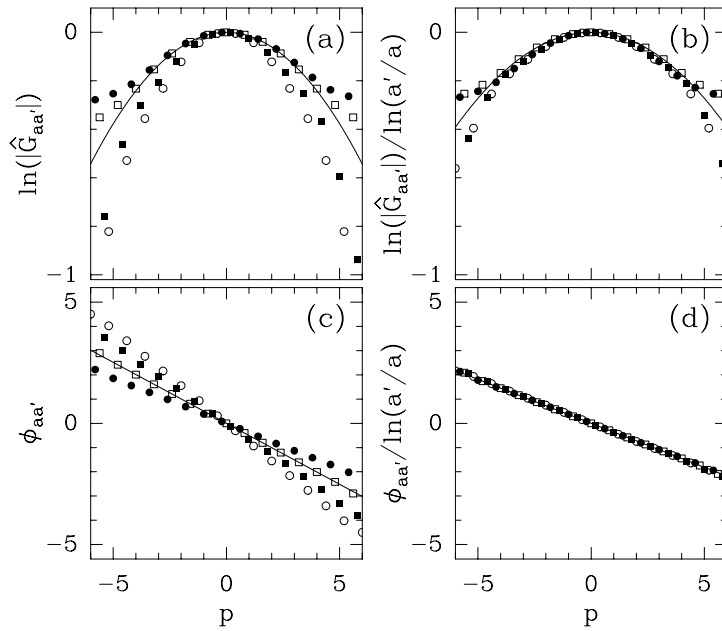


Fig. 3.25 – Calcul du noyau $\hat{G}_{aa'}(p)$ pour 32 images (1024×1024) de surfaces rugueuses multifractales générées avec le modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales ($m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \ln 2$). ψ est l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. (a) $\ln |\hat{G}_{aa'}(p)|$ en fonction p ; (b) $\ln |\hat{G}_{aa'}(p)| / \ln(a'/a)$ en fonction p ; (c) $\Phi_{aa'}(p)$ en fonction p ; (d) $\Phi_{aa'}(p) / \ln(a'/a)$ en fonction p . Les symboles correspondent au paires d'échelles suivantes : $a = 2^{0.5}\sigma_W$, $a' = 2^{3.5}\sigma_W$ (○); $a = 2\sigma_W$, $a' = 2^{3.5}\sigma_W$ (■); $a = 2\sigma_W$, $a' = 2^3\sigma_W$ (□) et $a = 2^{1.5}\sigma_W$, $a' = 2^3\sigma_W$ (●). Dans (a) et (c) les traits pleins correspondent à la prédiction théorique pour le noyau $\hat{G}_{aa'}(p)$ (Éq. (3.55)) pour le couple d'échelles $a = 2\sigma_W$, $a' = 2^3\sigma_W$ (□). Dans (b) et (d) les traits pleins correspondent à la prédiction théorique pour le noyau d'autosimilarité $\hat{G}(p) = \exp[(imp - \sigma^2 p^2/2)/\ln 2]$.

où les coefficients réels c_k sont les *cumulants* de G .

Revenons à la règle de construction des cascades \mathcal{W} aléatoires définie dans la section 3.2.2. Soit P_j la pdf des modules des coefficients en ondelettes $d_{j,m,n}$ (Éqs. (3.24) et (3.25)). Notons $P_j^{(\log)}(u)$ la pdf de $\ln d_j$:

$$P_j^{(\log)}(u) = e^u P_j(e^u). \quad (3.50)$$

Si $j_1 > j_2$, alors l'équation (3.28) conduit à la relation :

$$\ln d_{j_2} = \ln d_{j_1} + \ln M_{j_1-1} + \cdots + \ln M_{j_2}. \quad (3.51)$$

Ainsi

$$P_{j_2}^{(\log)}(u) = P_{j_1}^{(\log)} \star G_{j_2 j_1}(u), \quad (3.52)$$

où $G_{j_2 j_1}(u) = G \star G \star \dots \star G$ et où $G(u)$ est la pdf de $\ln M$. On obtient donc dans l'espace de Fourier :

$$\hat{P}_{j_2}^{(\log)}(p) = \hat{P}_{j_1}^{(\log)}(p) \hat{G}^{s(j_2, j_1)}(p), \quad (3.53)$$

où

$$s(j_2, j_1) = j_1 - j_2 \quad (3.54)$$

représente le nombre d'étapes de la cascade entre l'échelle 2^{j_1} et l'échelle 2^{j_2} . Ces calculs élémentaires confirment que les cascades \mathcal{W} aléatoires sont autosimilaires et invariante d'échelle.

Cascades \mathcal{W} log-normales. Par définition du modèle, le noyau d'autosimilarité G est supposé être Gaussien [96, 97, 218, 219], ce qui conduit à la forme suivante dans l'espace de Fourier :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = \exp \left[\left(\frac{imp}{\ln 2} - \frac{\sigma^2 p^2}{2 \ln 2} \right) \ln \left(\frac{a'}{a} \right) \right]. \quad (3.55)$$

D'après l'équation (3.49), les cumulants de ce noyau Gaussien s'expriment simplement à partir des paramètres m et σ^2 du modèle :

$$c_1 = m / \ln 2, \quad c_2 = \sigma^2 / \ln 2, \quad c_k = 0, \quad \text{pour } k \geq 3. \quad (3.56)$$

Suivant la procédure utilisée dans la figure 3.26, ces cumulants peuvent être mesurés expérimentalement à partir du comportement en fonction de $\ln(a'/a)$ des quantités suivantes :

$$\begin{aligned} C_{2n+1}(a, a') &= (-1)^n \partial^{2n+1} \Phi_{aa'} / \partial p^{2n+1} |_{p=0}, \\ &= c_{2n+1} \ln(a'/a), \end{aligned} \quad (3.57)$$

et

$$\begin{aligned} C_{2n+2}(a, a') &= \partial^{2n+2} \ln |\hat{G}_{aa'}| / \partial p^{2n+2} |_{p=0}, \\ &= c_{2n+2} \ln(a'/a), \end{aligned} \quad (3.58)$$

pour $n \geq 0$, et où $\Phi_{aa'}$ est l'argument de $\hat{G}_{aa'}$. Lorsque l'on trace $C_1(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$ pour plusieurs valeurs de l'échelle de référence a' , on obtient l'ensemble des courbes représentées dans la figure 3.26a. On constate que tous les points de ces différentes courbes se positionnent parfaitement sur une même droite dont la pente est bien donnée par la valeur théorique du cumulante d'ordre un, $c_1 = m / \ln 2 = -0.38$. La figure 3.26b montre qu'une démarche similaire nous permet d'extraire le cumulante d'ordre deux, $c_2 = \sigma^2 / \ln 2 = 0.03$, du comportement linéaire de $C_2(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$. Dans la figure 3.26c, on constate que l'ensemble des données obtenues pour $C_3(a, a')$ fluctuent autour de la valeur $C_3(a, a') = 0$ et ce quelle que soit l'échelle de référence a' . La valeur théorique du cumulante d'ordre trois, $c_3 = 0$, constitue donc une bonne approximation de la pente de $C_3(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$. Ces fluctuations autour de 0 sont, encore une fois, le signe d'un manque de convergence statistique dans l'estimation des cumulants d'ordre supérieur ou égal à trois.

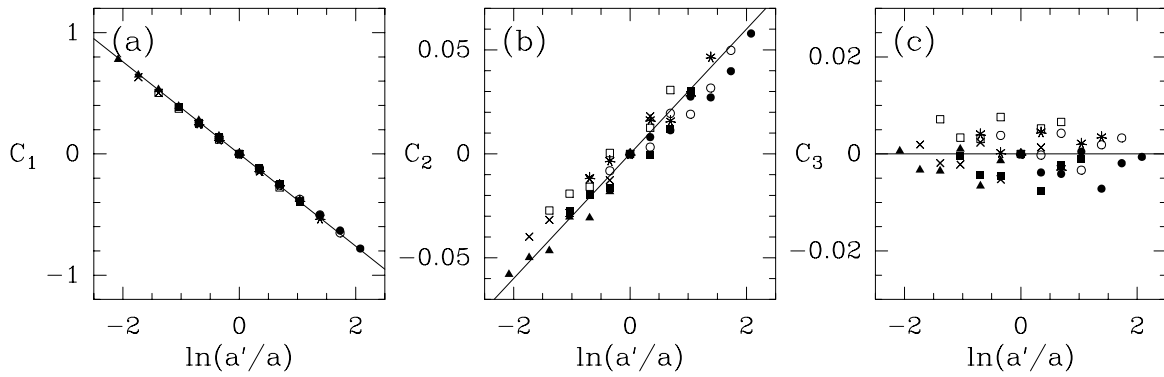


Fig. 3.26 – Calcul des cumulants du noyau d'autosimilarité \hat{G} de surfaces rugueuses multifractales générées avec le modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales. Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.25. (a) $C_1(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$; (b) $C_2(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$; (c) $C_3(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$. Les symboles correspondent aux valeurs suivantes de l'échelle de référence : $a' = 2^{0.5}\sigma_W$ (\bullet), $2\sigma_W$ (\circ), $2^{1.5}\sigma_W$ ($*$), $2^2\sigma_W$ (\blacksquare), $2^{2.5}\sigma_W$ (\square), $2^3\sigma_W$ (\times) et $2^{3.5}\sigma_W$ (\blacktriangle). Les traits pleins correspondent aux pentes théoriques $c_1 = m/\ln 2 = -0.38$ (a), $c_2 = \sigma^2/\ln 2 = 0.03$ (b) et $c_3 = 0$ (c).

Cascades \mathcal{W} log-Poisson. Le noyau d'une cascade \mathcal{W} log-Poisson possède la forme suivante dans l'espace de Fourier [96, 97, 218, 219] :

$$\hat{G}_{aa'}(p) = \exp \left[\left[\frac{\lambda(\cos(p \ln \beta) - 1)}{\ln 2} + i \frac{(\gamma p + \lambda \sin(p \ln \beta))}{\ln 2} \right] \ln \left(\frac{a'}{a} \right) \right], \quad (3.59)$$

où γ , β et λ sont les paramètres du modèle. D'après l'équation (3.49), on obtient les expressions suivantes pour les cumulants de ce noyau :

$$c_1 = \frac{\gamma + \lambda \ln \beta}{\ln 2} \quad \text{et} \quad c_k = \frac{\lambda(\ln \beta)^k}{\ln 2}, \quad \text{pour } k \geq 2. \quad (3.60)$$

Remarquons que le processus de cascade log-Poisson tend vers une cascade log-normale lorsque $|p \ln \beta| \ll 1$, c'est-à-dire dans la double limite $\beta \rightarrow 1$ et $\lambda(\ln \beta)^2 \rightarrow \sigma^2$. Dans la figure 3.28 nous avons représenté les résultats du calcul de $C_1(a, a')$, $C_2(a, a')$ et $C_3(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$, pour plusieurs valeurs de l'échelle de référence a' . On constate que pour C_1 et C_2 , les données se positionnent systématiquement le long de droites dont les pentes correspondent respectivement aux prédictions théoriques pour les cumulants $c_1 = (\gamma + \lambda \ln \beta)/\ln 2 = -0.381$ et $c_2 = \lambda(\ln \beta)^2/\ln 2 = 0.036$. Notons que ces résultats apportent la preuve numérique de l'invariance d'échelle du processus étudié. Lorsque l'on observe la figure 3.28c, on remarque un comportement de C_3 assez bruité. Cependant, malgré les problèmes de convergence statistique, l'ensemble des points semble suivre une tendance de pente négative pas trop éloignée de la valeur théorique $c_3 = \lambda(\ln \beta)^3/\ln 2 = -0.0049$. Cette tendance non-nulle permet donc de distinguer le modèle log-Poisson (Fig. 3.28c) de

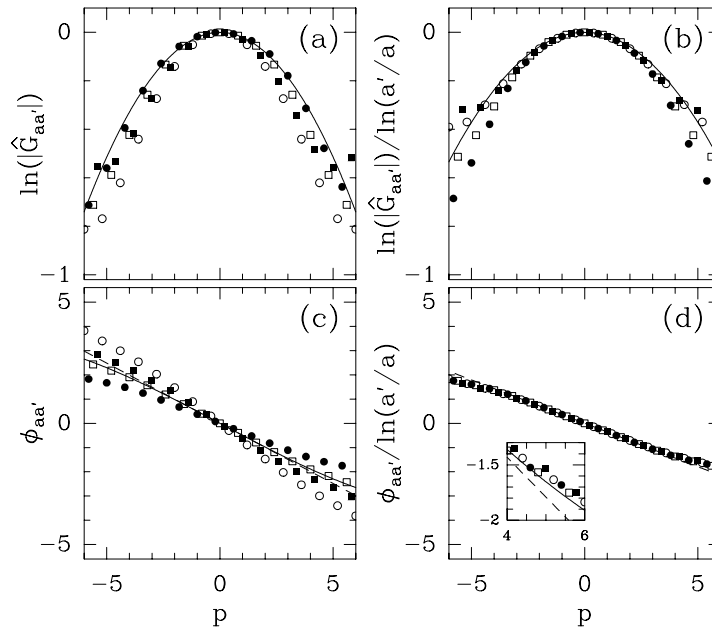


Fig. 3.27 – Calcul du noyau $\hat{G}_{aa'}(p)$ pour 32 images (1024×1024) de surfaces rugueuses multifractales générées avec le modèle de cascade \mathcal{W} aléatoires log-Poisson ($\lambda = -(1/9) \ln 2$, $\beta = (2/3)^{1/3}$ et $\lambda = 2 \ln 2$). Même représentation que dans la figure 3.25. Dans (a) et (c) les traits pleins correspondent aux prédictions théoriques pour le noyau $\hat{G}_{aa'}(p)$ (Éq. (3.59)) pour $a = 2\sigma_W$, $a' = 2^3\sigma_W$ (\square); les traits interrompus correspondent à l'approximation log-normale de $\hat{G}_{aa'}(p)$. Dans (b) et (d) les traits pleins correspondent aux prédictions théoriques du noyau d'autosimilarité $\hat{G}(p) = \exp [(\lambda(\cos(p \ln \beta) - 1) + i(\gamma p + \lambda \sin(p \ln \beta))) / \ln 2]$; les traits interrompus correspondent à l'approximation log-normale du noyau d'autosimilarité $\hat{G}(p) = \exp [(i(\gamma + \ln \beta)p - \lambda(\ln \beta)^2 p^2 / 2) / \ln 2]$.

son approximation log-normale (Fig. 3.26c). La figure 3.27d illustre cette légère différence : on constate que pour des valeurs de $|p|$ plus grandes que 4, $\Phi_{aa'} / \ln(a'/a)$ s'éloigne de la prédiction linéaire du processus log-normal (trait interrompu) caractérisant ainsi la présence d'un cumulatif d'ordre trois différent de zéro. Cependant, la zone où cette différence devient significative correspond aux grandes valeurs de $|p|$ où nos calculs commencent à souffrir sérieusement de problème de convergence statistique. Il faut donc interpréter ces observations avec beaucoup de prudence et savoir se contenter parfois de l'information qualitative qu'elles peuvent fournir.

Maintenant que nous avons réussi à déterminer la forme du noyau G pour chacun des deux modèles de cascades \mathcal{W} aléatoires de la section 3.2.2, il est important de vérifier la validité de notre méthodologie. Pour cela, nous allons tenter de superposer sur une même courbe, les pdfs du module des MMMTO calculées à différentes échelles, en utilisant la formule (3.41) dans laquelle nous remplaçons le noyau $G_{aa'}$ par notre estimation numérique. La figure 3.29a montre le résultat remarquable obtenu dans le cas log-normal avec le noyau

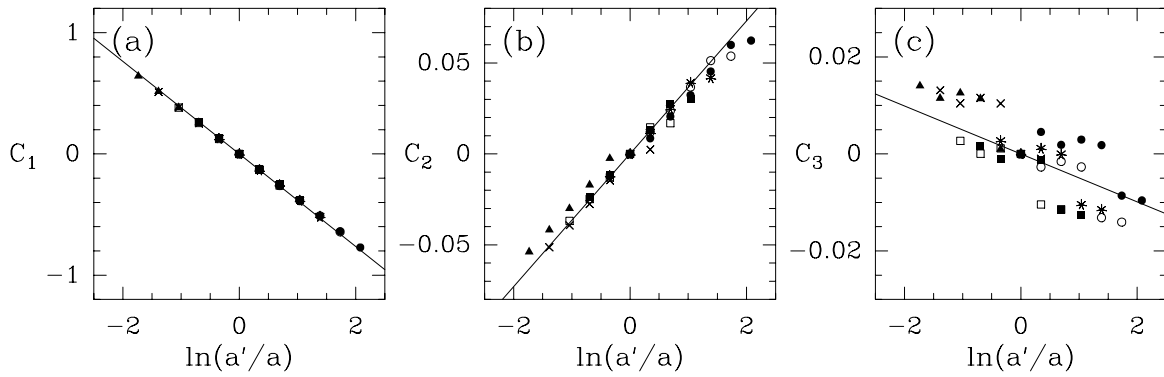


Fig. 3.28 – Calcul des cumulants du noyau d'autosimilarité \hat{G} de surfaces rugueuses multifractales générées avec le modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires log-Poisson. Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 3.27. (a) $C_1(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$; (b) $C_2(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$; (c) $C_3(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$. Les symboles correspondent aux échelles de référence suivantes : $a' = 2^{0.5}\sigma_W$ (\bullet), $2\sigma_W$ (\circ), $2^{1.5}\sigma_W$ ($*$), $2^2\sigma_W$ (\blacksquare), $2^{2.5}\sigma_W$ (\square), $2^3\sigma_W$ (\times) et $2^{3.5}\sigma_W$ (\blacktriangle). Les traits pleins correspondent aux pentes théoriques $c_1 = (\gamma + \lambda \ln \beta) / \ln 2 = -0.381$ (a), $c_2 = \lambda(\ln \beta)^2 / \ln 2 = 0.036$ (b) et $c_3 = \lambda(\ln \beta)^3 / \ln 2 = -0.0049$ (c).

Gaussien calculée dans les figures 3.25 et 3.26. Dans la figure 3.29b, les queues des pdfs restent distinctes dans le cas de la cascade log-Poisson lorsque l'on utilise l'approximation Gaussienne du noyau, c'est-à-dire sans la présence du troisième cumulant. Lorsque l'on introduit la contribution de c_3 dans la forme de G (Fig. 3.29c), sans que cela soit spectaculaire, les queues semblent se rapprocher légèrement : encore une fois nous atteignons les limites de notre étude pour l'échantillon statistique de 32 images (1024×1024) dont nous disposons.

Remarque

Il est possible de relier la définition de la fonction caractéristique $M(p, a)$ (Éq. (3.45)) à celle de la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ donnée par l'équation (2.70) (page 72) [97] :

$$S(q, a) = \frac{\mathcal{Z}(q, a)}{\mathcal{Z}(0, a)} = \langle \mathcal{M}^q \rangle (a) = M(-iq, a), \quad (3.61)$$

$$\sim a^{\tau(q)+2},$$

où $\mathcal{Z}(0, a) \sim a^{-2}$ dans le cas des surfaces rugueuses multifractales qui sont singulières en tout point. De l'expression du noyau G dans l'espace de Fourier (Éq. (3.47)), on déduit de l'équation (3.61) la relation suivante :

$$\frac{S(q, a)}{S(q, a')} = \hat{G}_{aa'}(-iq). \quad (3.62)$$

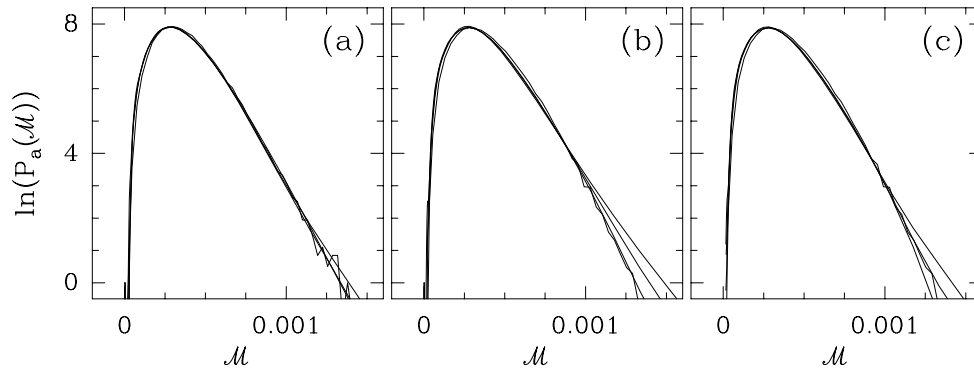


Fig. 3.29 – Pdfs de \mathcal{M}_ψ calculées aux échelles suivantes : $a = \sigma_W, 2\sigma_W, 4\sigma_W$ et $8\sigma_W$. (a) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de \mathcal{M} ; données correspondant aux cascades \mathcal{W} log-normales de la figure 3.20a et transformées suivant l'équation (3.41) avec le noyau Gaussien déterminé numériquement dans les figures 3.25 et 3.26. (b) $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de \mathcal{M} ; données correspondant aux cascades \mathcal{W} log-Poisson de la figure 3.24a et transformées suivant un noyau Gaussien construit à partir des deux premiers cumulants estimés dans les figure 3.28a et 3.28b (c). Mêmes pdfs que dans la figure (b), mais après transformation avec un noyau faisant intervenir le troisième cumulant estimé dans la figure 3.28c.

En utilisant l'expression (3.49) de $\hat{G}_{aa'}$, on obtient :

$$\frac{S(q, a)}{S(q, a')} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{\sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{q^k}{k!}}, \quad (3.63)$$

comportement qui est consistant avec le comportement en loi de puissance donnée par l'équation (3.61) dans la mesure où

$$\tau(q) = - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{q^k}{k!} - 2. \quad (3.64)$$

Cette équation permet de définir la forme générale du spectre $\tau(q)$ en fonction des cumulants c_k . Dans le cas des cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales et log-Poisson, l'introduction de l'expression des cumulants (Éq. (3.56) et (3.60)) dans l'équation (3.64), permet de retrouver l'expression des spectres $\tau(q)$ théoriques donnée par les équations (3.29) et (3.37). Ainsi, la similitude entre les deux premiers cumulants de ces deux modèles (log-normal : $c_1 = -0.380$, $c_2 = 0.030$; log-Poisson : $c_1 = -0.381$, $c_2 = 0.036$) débouche, comme nous l'avons vu dans la section 3.3, sur une forte ressemblance des spectres $\tau(q)$ correspondants, la distinction venant essentiellement de la différence entre les cumulants d'ordre supérieur ou égal à trois. Ceci explique *a posteriori* les difficultés rencontrées par la méthode MMT0 2D pour distinguer les propriétés multifractales des surfaces rugueuses engendrées par ces deux modèles de cascades aléatoires pour les jeux très particuliers de paramètres utilisés.

3.5 Transformée en ondelettes et fonctions de corrélation espace-échelles

3.5.1 Fonctions de corrélation espace-échelles

Les différentes tentatives, rapportées dans la littérature [241–243], d'étude des corrélations présentes dans les fonctions multifractales se basent essentiellement sur le calcul de corrélations spatiales entre singularités de même exposant de Hölder ou d'exposants de Hölder différents. Une nouvelle approche a été récemment proposée dans les Réfs [100, 111, 236]. L'originalité de cette approche est qu'elle ne repose pas sur (ni présuppose) les propriétés d'invariance d'échelle de la fonction considérée. En fait, celle ci consiste à étudier les corrélations d'une décomposition espace-échelles de la fonction étudiée. Plus précisément, si $\chi(\mathbf{x})$ est une fonction localisée de type « porte » telle que $\|\chi\|_1 = 1$, l'idée est de considérer la quantité $\varepsilon^2(\mathbf{x}, a)$ définie à partir de la transformée en ondelettes de la façon suivante :

$$\varepsilon^2(\mathbf{x}, a) = a^{-4} \int \chi((\mathbf{x} - \mathbf{y})/a) |\mathbf{T}_\psi[f](\mathbf{y}, a)|^2 d^2\mathbf{y}, \quad (3.65)$$

et telle que la norme L^2 de f s'exprime simplement sous la forme :

$$\|f\|_2^2 = \iint \varepsilon^2(\mathbf{x}, a) d^2\mathbf{x} da. \quad (3.66)$$

$\varepsilon^2(\mathbf{x}, a)$ peut donc être vu comme une densité d'énergie locale espace-échelles de la fonction f . La vraie densité d'énergie est obtenue lorsque χ est un Dirac et en jouant sur la forme de cette fonction (en prenant une fonction porte, par exemple) on peut contourner les problèmes d'instabilité numérique. Cette quantité $\varepsilon^2(\mathbf{x}, a)$ étant définie positive, on préférera plutôt travailler avec son logarithme, que l'on appellera *magnitude* de la fonction f au point \mathbf{x} et à l'échelle a :

$$\omega(\mathbf{x}, a) = \frac{1}{2} \ln \varepsilon^2(\mathbf{x}, a). \quad (3.67)$$

Notre but dans cette section est de montrer qu'un processus multiplicatif peut être mis en évidence par l'étude des corrélations de ces magnitudes espace-échelles :

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; a_1, a_2) = \langle \tilde{\omega}(\mathbf{x}_1, a_1) \tilde{\omega}(\mathbf{x}_2, a_2) \rangle, \quad (3.68)$$

où $\langle \dots \rangle$ est la moyenne d'ensemble, et $\tilde{\omega}$ le processus centré $\omega - \langle \omega \rangle$.

Remarque

Notons que, plutôt que de travailler directement sur le module de la transformée en ondelettes continue, on peut choisir de se limiter aux points du squelette de la transformée en ondelettes, c'est-à-dire aux MMMTO. Dans ce cas la magnitude est simplement $\omega(\mathbf{x}, a) = \ln \mathcal{M}(\mathbf{x}, a)$, où (\mathbf{x}, a) est un MMMTO appartenant au squelette.

3.5.2 Analyse des corrélations espace-échelles des cascades \mathcal{W} aléatoires

La construction d'une cascade \mathcal{W} aléatoire suit une règle qui se base sur un arbre dans le demi-hyperplan espace-échelles (section 3.2.2). C'est cette structure en arbre qui justifie la notion de cascade : un nœud de l'arbre symbolise une étape élémentaire du processus multiplicatif et le coefficient en ondelettes de ce nœud « contient » une information sur l'histoire des coefficients de ses nœuds pères depuis la génération la plus ancienne, c'est-à-dire l'échelle « intégrale ». C'est cette information que nous cherchons à extraire par l'estimation des fonctions de corrélation espace-échelles. Chaque nœud est associé à un détail donné à une échelle donnée dont l'importance est déterminée par la valeur du coefficient en ondelettes en ce nœud de l'arbre de la décomposition sur la base orthogonale d'ondelettes séparables. L'étude des corrélations entre ces coefficients est donc susceptible de nous renseigner à la fois sur la structure ultramétrique de la construction ainsi que sur l'histoire de ces valeurs [111, 236–238]. Intéressons nous dans un premier temps aux corrélations entre deux coefficients qui se trouvent à une même échelle $a_j = 2^j$. Soit $|\Delta \mathbf{x}| = \Delta x = 2^j \Delta k$ la distance entre deux coefficients de la décomposition en ondelettes. Afin de simplifier les notations, nous avons choisi de nous concentrer uniquement sur les écarts suivant la direction de l'axe des x . Comme nous le verrons plus tard, dans le cas des fonctions f isotropes, les prédictions théoriques sont indépendantes de la direction de séparation. Soient $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$ et $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} + \Delta \mathbf{k}$, avec $\Delta \mathbf{k} = (\Delta k, 0)$. Supposons que l'ancêtre commun le plus proche des coefficients d_{j, \mathbf{k}_1} et d_{j, \mathbf{k}_2} (Éqs. (3.24) et (3.25)) se situe à l'échelle $2^{N-l(j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}$. La valeur $l(j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ définit la *distance ultramétrique* entre les deux coefficients en ondelettes [219]. Dans ces conditions, et d'après l'équation (3.25), on a :

$$d_{j, \mathbf{k}_1} = M^{(N-1)} \dots M^{(N-l(j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2))} \cdot M_{[1]}^{(N-l(j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)-1)} \dots M_{[1]}^{(j)}, \quad (3.69)$$

et

$$d_{j, \mathbf{k}_2} = M^{(N-1)} \dots M^{(N-l(j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2))} \cdot M_{[2]}^{(N-l(j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)-1)} \dots M_{[2]}^{(j)}, \quad (3.70)$$

où les $M^{(i)}$, $M_{[1]}^{(i)}$ et $M_{[2]}^{(i)}$ sont des variables indépendantes qui suivent la même loi $P(M)$ que la variable aléatoire M . La covariance de leur logarithme s'exprime donc simplement sous la forme

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\ln d_{j, \mathbf{k}_1}, \ln d_{j, \mathbf{k}_2}) &= \sum_{i=1}^{l(j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} \text{Cov}(\ln M^{(N-i)}, \ln M^{(N-i)}), \\ &= \sigma^2 l(j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (3.71)$$

où σ^2 est la variance de $\ln M$. Remarquons que la structure ultramétrique des cascades \mathcal{W} implique qu'un tel processus n'est pas stationnaire (ni ergodique). Le fait que nous manipulons en général des réalisations indépendantes de taille $L = 2^N$ de ces processus

de cascade, permet de considérer qu'en bonne approximation les corrélations ne dépendent que de la distance $\Delta x = |\mathbf{\Delta x}|$. On peut ainsi remplacer dans l'équation (3.68) la moyenne d'ensemble par la moyenne d'espace [219] :

$$C(\Delta x_{j,2^p}; a_j) = 4^{j-N} \sigma^2 \sum_{l=0}^{N-j-1} N_{j,2^p}(l)l, \quad (3.72)$$

où $N_{j,2^p}(l)$ est le nombre de coefficients en ondelettes $d_{j,\mathbf{k}}$ ($0 \leq k_x \leq 2^j - 2^p$) tels que $d_{j,\mathbf{k}}$ et $d_{j,\mathbf{k}'}$, où $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ et $\mathbf{k}' = (k_x + 2^p, k_y)$, sont à une distance ultramétrique l l'un de l'autre. Il est évident que $N_{j,2^p}(l) = 0$ pour $l \geq N - j - p$. De plus, on montre facilement que $\forall l < N - j - p$,

$$N_{j,2^p}(l) = 4^p N_{j-p,1}(l). \quad (3.73)$$

Comme $N_{j,1}(l) = 2^{N-j+l}$, l'équation (3.72) devient, pour tout $p < N - j$:

$$\begin{aligned} C(\Delta x_{j,2^p}; a_j) &= 4^{j-N} \sigma^2 \sum_{l=0}^{N-j-p-1} 4^p N_{j-p,1}(l)l, \\ &= 4^{p+j-N} \sigma^2 \sum_{l=0}^{N-j-p-1} 2^{N-j-p} 2^l l, \\ &= 2^{p+j-N} \sigma^2 2 [(j-p)2^{N-j-p-1} - 2^{N-j-p} + 1], \\ &= \sigma^2 (N - j - p - 2 + 2^{p+j-N+1}). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Cela signifie simplement que lorsque $\Delta x (= 2^{p+j})$ est suffisamment petit ($a < \Delta x \ll L$), la fonction de corrélation $C(\Delta x, a)$ de la cascade \mathcal{W} se comporte comme le logarithme de la distance Δx [219, 236] :

$$C(\Delta x, a) \sim \sigma^2 \log_2 \left(\frac{L}{\Delta x} \right). \quad (3.75)$$

Ainsi, la fonction de corrélation a un comportement asymptotique qui ne dépend pas de l'échelle a . De plus, bien qu'établie pour les séparations dans la direction des x , l'équation (3.74) est tout aussi valable pour les séparations suivant l'axe des y ou suivant les diagonales. Ceci implique que l'équation (3.75) demeure valide pour les surfaces rugueuses isotropes lorsque l'on moyenne sur la direction du vecteur séparation $\mathbf{\Delta x}$.

Remarque

La même démarche peut être appliquée pour prédire le comportement de la fonction de corrélation $C(\Delta x, a_1, a_2)$, entre un coefficient à l'échelle a_1 et un coefficient à l'échelle a_2 . Lorsque Δx est plus grand que la plus grande des deux échelles, la fonction de

corrélation s'exprime uniquement en fonction de Δx , indépendamment des échelles mises en jeux [219, 236] :

$$C(\Delta x, a_1, a_2) = \sigma^2 \left(\log_2 \left(\frac{L}{\Delta x} \right) - 2 + 2 \frac{\Delta x}{L} \right), \quad (3.76)$$

pour $\sup(a_1, a_2) \leq \Delta x < L$.

Ainsi la structure ultramétrique de la transformée en ondelettes de surfaces rugueuses multifractales générées par un modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires, se manifeste par un comportement décroissant très lent des fonctions de corrélation espace-échelles comme le logarithme de la distance de séparation.

3.5.3 Distinction entre processus multiplicatifs et additifs

Dans la figure 3.30a sont rapportés les résultats du calcul des fonctions de corrélation $C(\Delta x, a_1, a_2)$ sur une moyenne de 32 images (1024×1024) de surfaces rugueuses multifractales générées à partir du modèle de cascades \mathcal{W} log-normales, pour le même jeu de paramètres que celui utilisé pour synthétiser la surface rugueuse illustrée dans la figure 3.6a. On constate que pour $\Delta x > \sup(a_1, a_2)$, tous les points se positionnent une même courbe quelle que soient les échelles a_1 et a_2 concernées. De plus, bien que l'ondelette analysatrice soit différente de celle utilisée lors de la construction, les résultats numériques sont en remarquable accord avec la prédiction théorique donnée par l'équation (3.76) pour $\sigma^2 = 0.03 \ln 2$ et $L = 1024$. Cette lente décroissance logarithmique de la fonction de corrélation espace-échelles est caractéristique de la présence de corrélations à longue distance dans la construction des cascades \mathcal{W} [111, 219, 236–238]. Remarquons que l'on ne retrouve pas ce comportement décroissant indépendant de l'échelle dans les processus additifs tels que les surfaces Browniennes fractionnaires étudiées dans la section 2.5 (page 78). En effet, les corrélations présentes dans de telles surfaces résultent des fluctuations du signe et non de l'amplitude de leurs variations. La figure 3.30b montre les fonctions de corrélation $C(\Delta x, a_1, a_2)$ obtenues pour une moyenne sur 32 images (1024×1024) de surfaces rugueuses monofractales isotropes générées pour un processus Brownien fractionnaire d'index $H = 1/3$ (voir figure 2.14a, page 80). À la différence avec les processus de cascades \mathcal{W} aléatoires, on constate sur ces données l'absence totale de corrélation pour des distances Δx supérieures à la plus grande des deux échelles a_1 et a_2 .

Remarque

Nous n'avons pas jugé opportun de montrer les résultats du calcul de ces fonctions de corrélation dans le cas des surfaces rugueuses synthétisées à l'aide du modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires log-Poisson, dans la mesure où aucune différence notable par rapport aux cascades log-normales n'est à signaler. Cela s'explique, encore une fois, par la similitude statistique des surfaces générées due au choix particulier des paramètres pour chacun de ces modèles. En effet, la variance pour la cascade log-Poisson $\sigma^2 = \lambda(\ln \beta)^2 = 0.025$ est

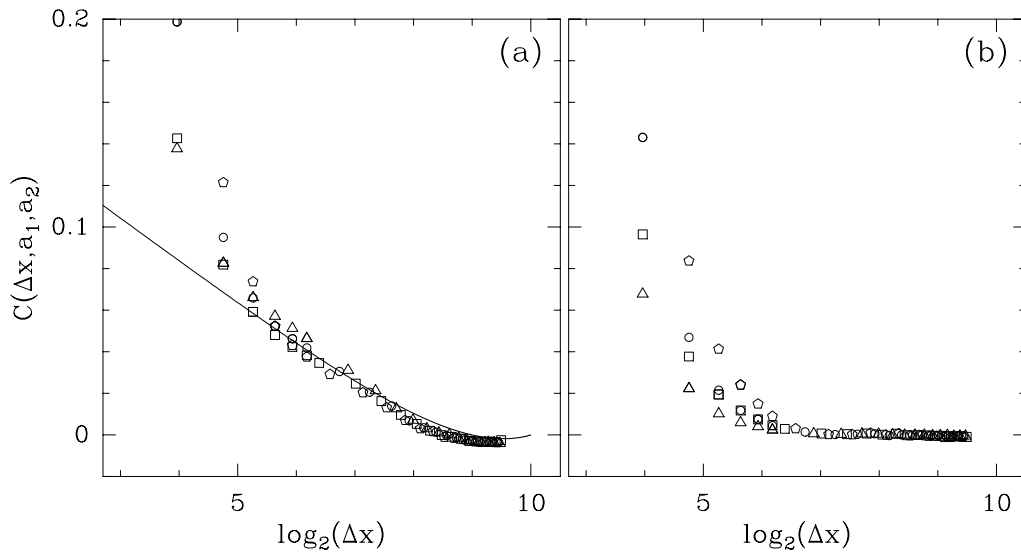


Fig. 3.30 – Fonction de corrélation $C(\Delta x, a_1, a_2)$ de la magnitude (Éq. (3.68)) en fonction de $\log_2(\Delta x)$, calculée à partir des transformées en ondelettes de 32 images (1024×1024). L'ondelette analysatrice utilisée est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. (a) Cascades \mathcal{W} log-normales pour le jeu de paramètres $m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \ln 2$. (b) Surfaces Browniennes fractionnaires $B_{H=1/3}$. Les symboles correspondent aux paires d'échelles suivantes : $a_1 = a_2 = 2\sigma_W$ (\circ); $a_1 = \sigma_W, a_2 = 2\sigma_W$ (Δ); $a_1 = \sigma_W, a_2 = 2^2\sigma_W$ (\square) et $a_1 = 2\sigma_W, a_2 = 2^2\sigma_W$ (\diamond). Dans (a) le trait plein représente la prédiction théorique donnée par l'équation (3.76). Nous avons jugé bon de ne pas montrer les points pour $\Delta x \leq \sigma_W$ (~ 13 pixels).

très proche de celle de la cascade log-normale $\sigma^2 = 0.03 \ln 2 = 0.021$. Or la variance σ^2 est le seul paramètre (avec la taille du système L) qui intervient dans l'expression de la fonction de corrélation espace-échelles (Éq. (3.76)). Afin de pouvoir différencier ces deux modèles, nous avons vu qu'il était nécessaire d'accéder à l'information contenue dans les cumulants d'ordre supérieur du noyau d'autosimilarité. Dans le cadre de l'étude des fonctions de corrélation espace-échelles, cela démontre la nécessité de calculer des fonctions corrélation espace-échelles mettant en jeu un nombre de points supérieur à deux. Pour cela, il est impératif d'avoir à sa disposition une collection d'images suffisamment importante afin de surmonter les problèmes de convergence statistique.

3.6 Perspectives

Dans ce chapitre nous avons testé la capacité de la méthode MMTO 2D à extraire l'information sous-jacente à la construction et aux caractéristiques multifractales de surfaces rugueuses synthétiques. En effet, cette méthode permet de quantifier précisément les spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ qui décrivent statistiquement les fluctuations de rugosité des surfaces étudiées. Toutefois, nous avons montré qu'il était possible d'aller plus avant dans la caractérisation

de la complexité structurelle de ces surfaces rugueuses. En particulier, le calcul du noyau d'autosimilarité à partir du squelette de la transformée en ondelettes permet de remonter au processus multiplicatif sous-jacent, d'en préciser la nature et de vérifier l'invariance d'échelle. Enfin, l'étude des fonctions de corrélation espace-échelles est indispensable pour apporter la preuve d'une organisation structurelle ultramétrique sous-jacente à la nature multifractale de ces surfaces rugueuses.

Au-delà de la description multifractale, nous nous sommes aussi intéressés dans ce chapitre à la modélisation et à la synthèse de surfaces rugueuses multifractales par des processus de cascades aléatoires sur des bases orthogonales d'ondelettes séparables 2D. Ces cascades \mathcal{W} aléatoires présentent l'avantage d'offrir un cadre mathématique susceptible de faciliter la démonstration de résultats théoriques rigoureux concernant les propriétés de régularité de fonctions 2D multifractales isotropes ou anisotropes. En effet, de tels modèles offrent, par la simplicité et la souplesse de leur règle de construction, la possibilité de générer une grande variété de surfaces aux caractéristiques très différentes. On peut imaginer appliquer d'autres règles de propagation des coefficients sur l'arbre de la décomposition en ondelettes, en introduisant par exemple des corrélations entre les branches d'une même génération ou un effet de mémoire à l'intérieur d'une même branche. On peut aussi envisager de changer la topologie de cet arbre voire d'utiliser d'autres bases d'ondelettes.

Au delà de l'aspect fondamental des résultats théoriques et numériques rapportés dans ce chapitre, j'aimerais insister pour conclure sur l'apport technologique que constitue l'arsenal algorithmique et la batterie de logiciels que nous avons dû développer pour la conduite de ce travail. En effet, la richesse et la complexité des méthodes utilisées ont nécessité un investissement important de mise en œuvre. Nous disposons aujourd'hui d'outils de calcul performants concernant : toutes les étapes de la méthode MMT0 2D (voir la description dans la section 2.4.3, page 74), la méthode du noyau d'autosimilarité, la méthode des fonctions de corrélation espace-échelles, les algorithmes de synthèse par cascades \mathcal{W} aléatoires sur des bases d'ondelettes. Nous espérons dans un futur proche pouvoir mettre ces nouveaux outils d'analyse et de synthèse d'images à la disposition de la communauté scientifique via le site internet du CRPP.

Chapitre 4

Application de la MMTO 2D à l'analyse d'images satellites de nuages

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous appliquons la méthode MMTO 2D à l'étude d'images satellites de nuages. La problématique que pose l'observation d'une extrême variabilité dans les données enregistrées, avec des fluctuations mettant en jeu une gamme d'échelles importante, a été principalement abordée dans le cadre de l'étude des écoulements turbulents [20,87,188,189]. Une des préoccupations principales dans ce domaine demeure la possible universalité des propriétés d'invariance d'échelle des champs turbulents dans la limite où la petite échelle du système, à savoir l'échelle de Kolmogorov où l'énergie est dissipée, tend vers zéro (c'est-à-dire à la limite des grands nombres de Reynolds). Cependant, il est très difficile d'accéder expérimentalement à des valeurs du nombre de Reynolds suffisamment grandes pour pouvoir tester les hypothèses émises. Malgré un manque de flexibilité certain par rapport aux expériences de laboratoires (soufflerie), l'atmosphère fournit un cadre expérimental exceptionnel dans la mesure où elle permet d'atteindre des nombres de Reynolds extrêmement élevés. Les nuages constituent incontestablement l'une des manifestations la plus visible et la plus évidente de la turbulence atmosphérique. À l'origine du cycle hydrologique, les nuages ont une influence non négligeable sur la propagation du rayonnement solaire dans l'atmosphère. Ils jouent donc un rôle central dans la régulation du climat [12,244–247]. La

modélisation de leur structure est donc primordiale pour pouvoir prédire l'évolution des conditions climatiques. Aussi surprenant que cela puisse paraître les nuages sont des objets encore très mal compris. En particulier, l'extrême simplicité des modèles utilisés pour simuler la composante nuage dans le problème de l'interaction nuage-rayonnement est responsable pour une grande part de l'incertitude des modèles climatiques actuels [248]. Ainsi les études des phénomènes de propagation du rayonnement solaire dans l'atmosphère supposent en général que les nuages sont homogènes et qu'ils forment une couche plate parallèle à la surface de la terre. La seule hétérogénéité introduite dans certains de ces modèles parmi les plus réalistes, consiste à partitionner l'espace en zones claires et en zones nuageuses dans une proportion fixée par la fraction de couverture nuageuse désirée. Ce manque de compréhension de la structure des nuages provient principalement d'un manque de données enregistrées *in situ* qui permettraient d'étudier plus en profondeur la microphysique des nuages ainsi que les interactions nuage-rayonnement. Il est maintenant acquis que la structure des nuages présente une grande variabilité dans toutes les directions et que les notions de fractales [244, 245, 249–254] et de multifractales [12, 246, 255–257] sont pertinentes pour analyser et modéliser la complexité géométrique 3D des nuages. Par géométrie, nous entendons non seulement la forme convolutive de la couche extérieure des nuages qui est le reflet de la turbulence environnante, mais aussi l'aspect intermittent de leur structure interne qui joue un rôle majeur dans la modulation du rayonnement solaire [239, 246, 255, 258–262]. Afin d'accéder à cette structure interne, les nombreuses campagnes de mesure (FIRE [263], ASTEX [264], SOCEX [265], etc.) menées durant ces quinze dernières années ont consisté à faire traverser le nuage par un ballon ou un avion sonde afin d'extraire des coupes 1D de champs tels que la concentration en eau liquide (LWC, de l'anglais *liquid water content*) de l'atmosphère [257, 266–273]. Grâce à ces programmes intensifs, on dispose aujourd'hui d'une grande quantité de données expérimentales qui toutes confirment l'extrême irrégularité des signaux enregistrés. De plus, la dynamique et la résolution de ces enregistrements permettent d'envisager l'analyse des propriétés d'invariance d'échelle des champs étudiés sur une gamme d'échelles très conséquente, depuis quelques centimètres jusqu'à des centaines de kilomètres. Depuis quelques années, une alternative intéressante existe avec les images à haute résolution de nuages transmises par divers satellites. En effet, ces images fournissent une information spatiale sur les fluctuations de la concentration en eau liquide intégrée sur l'épaisseur des nuages [239, 250, 252–254, 259, 274–278]. Ces images sont obtenues par des systèmes de détection appelés « radars millimétriques » qui sont sensibles non seulement aux gouttes de pluie mais aussi aux gouttes d'eau en suspension dans l'atmosphère. L'analyse spectrale du champ de radiance 2D digitalisé [239, 259, 274–278] confirme l'existence de propriétés d'invariance d'échelle sur une gamme d'échelles suffisamment importante pour que l'on puisse envisager d'appliquer les concepts de fractales et multifractales.

La première analyse fractale de données atmosphériques remonte à l'article de Lovejoy [244] où celui-ci souligne une relation surface-périmètre anormale dans des données pluviométriques et de nuages. Cette première dans le domaine, ajoutée au succès grandissant des travaux de Mandelbrot [2, 3], ont rendu populaire l'analyse fractale des données géophysiques. À partir du milieu des années 80, des données à haute résolution sur le contenu en eau liquide des nuages commencent à être disponibles, et l'analyse spectrale de

ces signaux 1D permet d'établir la nature fractale des nuages [239, 266–272]. Les fluctuations de la densité en eau liquide est caractérisée par un comportement en loi de puissance de la densité spectrale $S(k) \sim 1/k^\beta$, sur une gamme d'échelles allant de la dizaine de mètres à la dizaine de kilomètres. Notons que l'exposant mesuré $\beta \sim 1.4-1.7$ est proche de l'exposant $\beta = 5/3$ que Corssin [279] et Obukhov [280] ont prédit pour un champ scalaire passif en turbulence pleinement développée 3D d'une part et que Kraichnan [281] a prédit pour la turbulence 2D d'autre part. Cependant, comme nous l'avons discuté dans la section 2.3.1 (page 53), l'analyse spectrale n'est pas appropriée pour caractériser les objets multifractals, c'est-à-dire dans les situations où il existe un continuum d'exposants caractérisant les propriétés d'invariance d'échelle. L'exposant spectral $\beta = 2H + 1$ permet uniquement d'estimer l'exposant de Hurst $H \sim 0.20 - 0.35$, qui nous indique simplement le fait que le champ est singulier et non-stationnaire ($0 < H < 1$). L'étude du caractère intermittent des fluctuations de la concentration en eau liquide du nuage nécessite donc l'utilisation d'outils plus adaptés. Lovejoy et ses collaborateurs [130–133, 194, 220, 221, 255, 256, 282] ont été les pionniers dans l'application du formalisme multifractal aux données atmosphériques. En utilisant les techniques des *moments traces* [130, 132, 133, 220, 221, 282], ils ont mis en évidence la présence d'un continuum d'exposants d'invariance d'échelle dans divers types de données géophysiques. Récemment, Davis et ses collaborateurs [246, 257, 273, 278] ont appliqué la technique des fonctions de structure sur des données de LWC collectées lors des programmes ASTEX et FIRE. Ils ont ainsi apporté des évidences complémentaires de la nature multifractale de la structure interne des nuages stratocumulus (Sc) sur une gamme d'échelles de plus de trois décades. La pertinence de la description multifractale a été confirmée par Wiscombe *et al* [277] lors de l'analyse de données expérimentales sur le contenu en eau liquide intégré sur l'épaisseur du nuage (LWP, de l'anglais *liquid water path*) du programme ARM. Ces trois études, qui sont en accord à propos de la nature multifractale de la structure des nuages, se basent uniquement sur des données 1D. Les fonctions de structure 1D ont aussi été utilisées pour l'étude de coupes 1D dans des images satellites à haute résolution de nuages [239, 283], mais, à notre connaissance, aucune méthode d'analyse 2D n'a été appliquée à l'analyse statistique d'invariance d'échelle de ces images.

Dans ce chapitre, nous allons donc appliquer la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO) 2D à l'analyse d'images satellites à haute résolution de nuages Sc marins [120, 122]. Cette méthode permet non seulement d'enrichir l'arsenal des techniques d'analyse multifractale, mais elle offre une alternative prometteuse au regard des insuffisances que présentent la méthode des fonctions de structure. En effet, cette dernière ne permet pas de caractériser convenablement la partie décroissante ($q < 0$) du spectre des singularités $D(h)$. D'autre part, la présence éventuelle de singularités dans les dérivées d'ordre supérieur ($h > 1$) du signal étudié voire la présence de comportements réguliers, affectent l'estimation des exposants $\tau(q)$ des fonctions de structure. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3 avec les surfaces multifractales synthétiques, la méthode MMTO 2D permet d'accéder avec précision au spectre des singularités $D(h)$ dans sa totalité. C'est donc avec un certain optimisme que l'on peut espérer, grâce à cette méthode, caractériser complètement la nature multifractale de la structure interne des nuages.

La caractérisation statistique des fluctuations de rugosité des images de nuages n'est

pas l'unique avantage que l'on puisse espérer tirer de l'application de la méthode MMTO 2D. En effet, on peut raisonnablement envisager d'extraire des données des informations sur la hiérarchie structurelle des nuages et sur certaines caractéristiques indispensables à l'élaboration de modèles stochastiques plus réalistes de la structure des nuages. Le but ultime étant bien sûr d'améliorer les programmes de simulation du transfert radiatif à travers les nuages [239, 246, 253, 255, 258, 260, 261, 278, 284–287] afin de pouvoir comparer les spectres multifractals numériques issus de ces simulations avec ceux extraits des données expérimentales par la méthode MMTO 2D. La littérature propose beaucoup de modèles de cascades multiplicatives débouchant sur des mesures multifractales [93, 130–133, 185, 187, 191–203, 220, 221, 282]. Par contre, les modèles permettant de construire des fonctions multifractales sont beaucoup plus rares [48, 50, 88, 215, 217]. Schertzer et Lovejoy ont proposés en 1987 [130], dans le cadre de la modélisation des nuages, une méthode qui s'inspire directement de la construction de l'escalier du diable. Ce modèle (FISC [130, 133, 220, 221, 223], de l'anglais *fractionnally integrated singular cascade*) consiste à générer une mesure multifractale via un processus de cascade singulière, à laquelle on applique une intégration fractionnaire. Comme nous l'avons expérimenté dans la section 3.2.1 (page 114), cette opération, qui est un simple filtrage en loi de puissance dans l'espace de Fourier, permet de passer d'une mesure à une fonction continue. En 1990, Cahalan *et al* [288] ont proposé une autre stratégie, le modèle de cascade bornée (*bounded cascade model*, en anglais) [211], qui permet, à partir d'une cascade singulière multiplicative, de générer un processus non-stationnaire permettant de synthétiser des surfaces rugueuses multifractales modélisant la structure interne des nuages stratocumulus marins. Ce modèle consiste à faire évoluer les poids multiplicatifs à chaque étape de la cascade afin d'atteindre la continuité à la limite des petites échelles. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'utiliser les diverses techniques présentées dans le chapitre 3, dont les méthodes de calcul du noyau d'autosimilarité et des fonctions de corrélation espace-échelles, afin de caractériser complètement le processus de cascade multiplicative sous-jacent à la nature multifractale de la structure des nuages. Cette étude va nous permettre de montrer que le modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales sur des bases d'ondelettes orthonormales séparables, que nous avons introduit dans la section 3.2.2 (page 122), est un candidat sérieux pour synthétiser la structure des nuages Sc [129]. On peut donc raisonnablement imaginer que dans un futur proche, les codes permettant de simuler l'interaction nuage-rayonnement intégreront le modèle de cascades \mathcal{W} log-normales pour rendre compte du caractère intermittent de la structure interne des nuages.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 4.2, nous présentons les données collectées par le satellite Landsat. Il s'agit du champ de radiance de nuages stratocumulus marins dont le rôle important dans la modulation du rayonnement solaire en font un sujet d'analyse privilégié. Dans la section 4.3, nous exposons et commentons les résultats de l'application de la méthode MMTO 2D à ces images du champs de radiance ainsi qu'à des images de l'épaisseur optique reconstruite artificiellement à partir des images du champ de radiance. Nous présentons en particulier les spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ dont la forme parabolique rappelle celle des spectres théoriques prédits par le modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales. Dans la section 4.4, la méthode de calcul du noyau d'autosimi-

larité est appliquée aux images Landsat du champ de radiance. Le calcul des cumulants de ce noyau suggère que les données ne permettent pas de distinguer un modèle de cascade \mathcal{W} aléatoire de son approximation log-normale. La section 4.5 expose les résultats du calcul des fonctions de corrélation espace-échelles et souligne l'existence d'une structure ultramétrique dans la représentation en ondelettes des fluctuations du champ de radiance, structure qui est proche de celle observée dans la transformée en ondelettes des surfaces rugueuses générées par le modèle de cascades \mathcal{W} log-normales. Enfin, nous concluons dans la section 4.6 par une comparaison des spectres de singularités extraits du champ de radiance des nuages Sc (et de l'épaisseur optique) avec ceux obtenus lors d'analyse de signaux expérimentaux 1D de champs de vitesse et de température en turbulence 3D pour des nombres de Reynolds importants.

4.2 Images Landsat de nuages stratocumulus marins

Depuis une cinquantaine d'années, l'imagerie satellite Landsat alimente la communauté scientifique de données concernant la surface de la terre et son atmosphère [223, 239, 246, 250, 252–254, 259, 274–278, 289]. Elle possède l'avantage d'être moins coûteuse que la mise en œuvre de programmes de mesure par avion sonde. De plus, c'est une technologie bien calibrée qui permet d'atteindre de hautes résolutions spatiale, spectrale et radiométrique [223, 239]. La première génération de Landsat (1 à 3) équipée d'un radiomètre multispectral (MSS, de l'anglais *multispectral scanning*) à cinq canaux, présente une dynamique codée sur 7 bits avec une résolution de 80 mètres. Les images étudiées dans ce chapitre ont été prises par Landsat 5 qui fait partie de la deuxième génération (4 et 5). La caméra TM (de l'anglais *thematic mapper*) qui le compose, possède 7 canaux et présente une dynamique codée sur 8 bits avec une résolution de 30 mètres. Les diverses campagnes de mesure ont permis d'obtenir des images de zones plus ou moins nuageuses dans le but de caractériser la morphologie des nuages. À cette fin, principalement deux méthodes d'analyse statistique ont été appliquées aux images Landsat : l'analyse spectrale 2D du champ de radiance [223, 239, 259, 274–276] et l'analyse des distributions jointes surface-périmètre sur des ensembles de nuages isolés dont les contours sont obtenus par simple seuillage de la radiance [250, 252–254]. Ces études ont révélé la présence de propriétés d'invariance d'échelle sur une grande gamme d'échelles, incitant par là la communauté des géophysiciens des sciences de l'atmosphère à s'intéresser de plus près aux concepts de fractale et de multifractale [12, 246].

Parmi les différents types de nuages, les stratocumulus marins sont incontestablement ceux qui ont suscité le plus d'intérêt, principalement pour leur effet important sur l'équilibre de l'énergie terrestre [12, 223, 239, 245, 246, 288]. Ils s'organisent en couches persistantes et très étendues, et contribuent énormément à la réflectance globale – ou albédo – de la planète. Les Sc marins ont un effet important sur le climat [247]. De plus, la compréhension des interactions nuage-rayonnement [239, 246, 255, 258–262, 285] et de façon plus générale la modélisation du climat [248], se trouvent très simplifiées avec les Sc marins, puisque ceux-ci sont peu épais (300-500 m) et relativement bien modélisés par une couche biplanaire

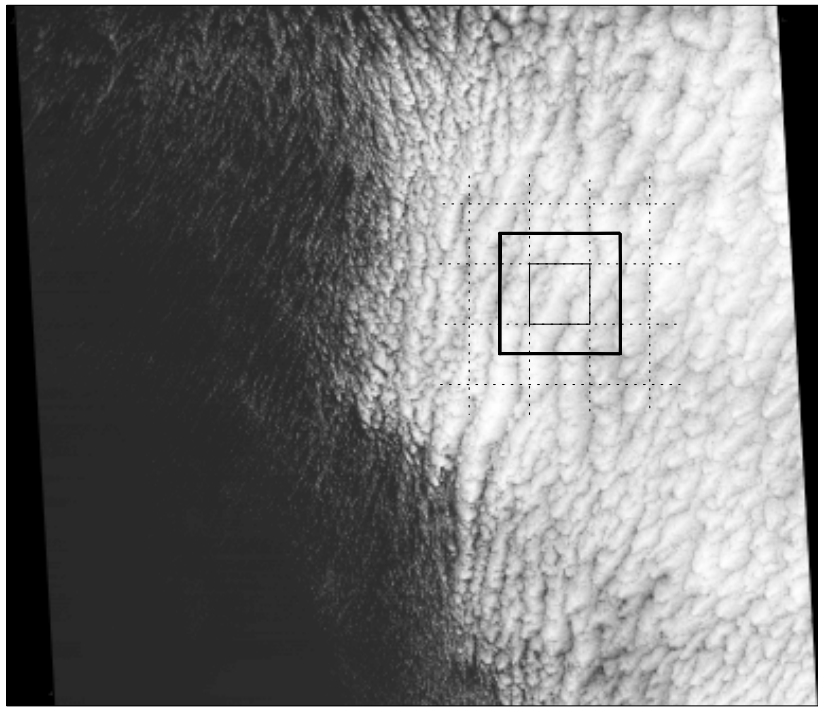


Fig. 4.1 – Image d’une zone nuageuse ($\simeq 196 \times 168 \text{ km}^2$) prise par la caméra TM (1 pixel = 30 m) de Landsat 5 sur le canal $0.6\text{-}0.7 \mu\text{m}$ pendant le programme FIRE [263], au dessus de l’océan pacifique au large de San Diego durant l’été 1987. Le champ de radiance est mesuré avec une dynamique de 8 bits. Le trait épais délimite l’une des 32 images (1024×1024) étudiées. Le trait fin correspond à la partie centrale de cette image dont la transformée en ondelettes n’est pas polluée par les effets de bords. Les traits interrompus illustrent le pavage constitué des parties centrales des 32 images.

pour laquelle la théorie du transfert radiatif est bien connue [239, 245, 255, 260, 261, 285]. Cependant, les modèles existants considèrent les stratocumulus marins comme des objets homogènes. Ces nuages présentant une extrême variabilité dans leur structure interne, il n’est pas surprenant que cette hypothèse simplificatrice introduise un biais systématique dans le calcul de la moyenne à grande échelle de la réflectance [261, 290] à l’aide du modèle de circulation globale (GCM, de l’anglais *global circulation model*).

La figure 4.1 représente l’image d’une zone nuageuse ($\simeq 196 \times 168 \text{ km}^2$) prise par la caméra TM (1 pixel = 30 m) de Landsat 5 sur le canal $0.6\text{-}0.7 \mu\text{m}$ pendant le programme FIRE [263] – de l’anglais *first ISCCP (International Satellite Cloud Climatology Project) Research Experiment* – qui a eu lieu dans l’océan pacifique au large de San Diego lors de l’été 1987. Nous allons étudier uniquement la zone nuageuse qui correspond à la partie droite de l’image, la partie gauche étant une zone de ciel dégagé. Cette partie est donc découpée en 32 morceaux carrés de 1024 pixels de côté (trait épais) qui se recouvrent de telle sorte que les parties centrales (trait fin) forment un pavage (trait interrompu). Ces parties centrales correspondent aux zones des images (1024×1024) dans lesquelles les résultats ne

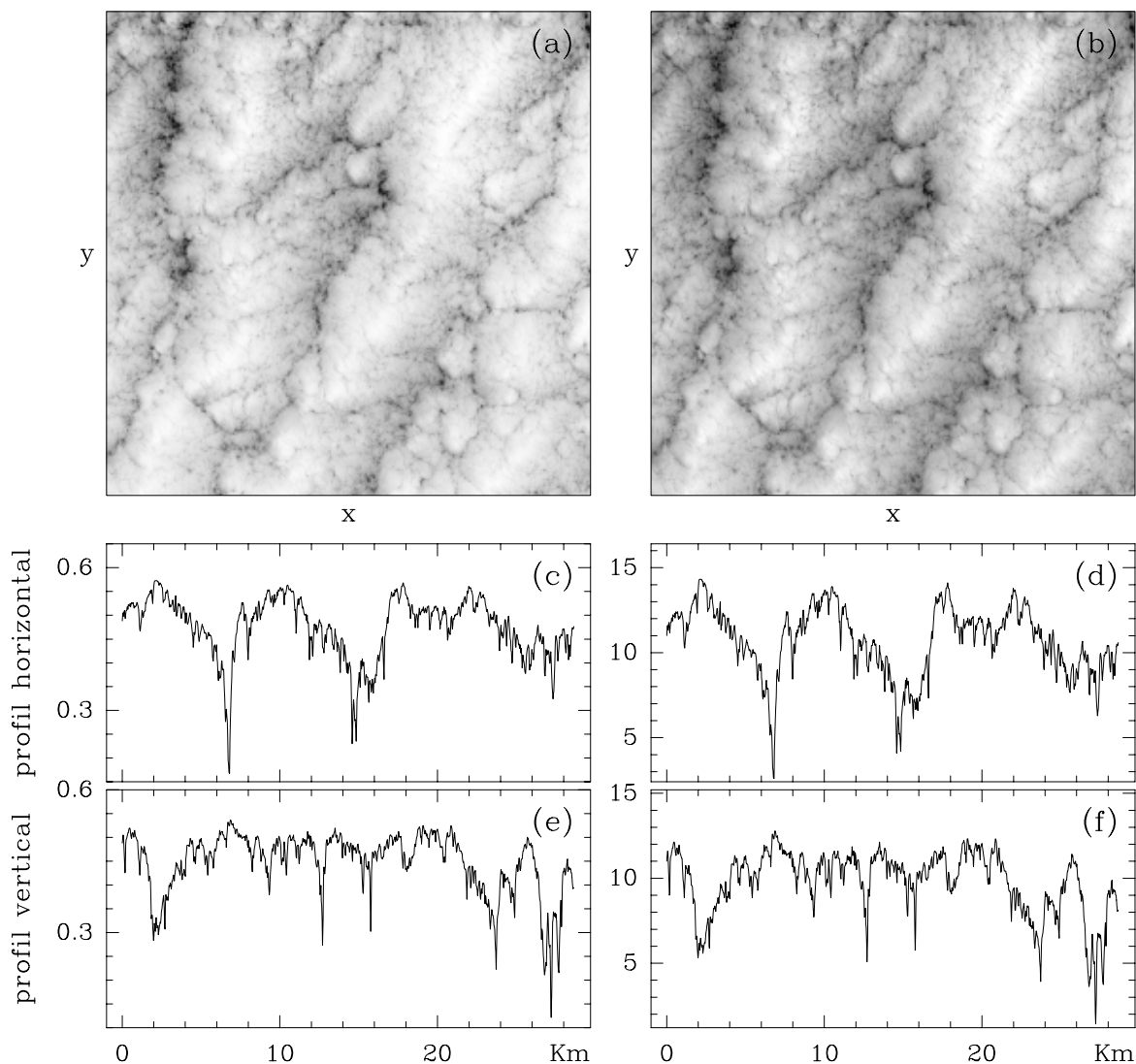


Fig. 4.2 – Une image (1024×1024) extraite du découpage de l'image Landsat de la figure 4.1. Radiance : (a) zone nuageuse; (c) profil 1D le long d'une coupe horizontale; (e) profil 1D le long d'une coupe verticale. Épaisseur optique sur la même zone, calculée à partir du champ de radiance via la table DISORT : (b) zone nuageuse; (d) profil 1D le long d'une coupe horizontale; (f) profil 1D le long d'une coupe verticale. Les images sont codées du noir ($\min I$) au blanc ($\max I$).

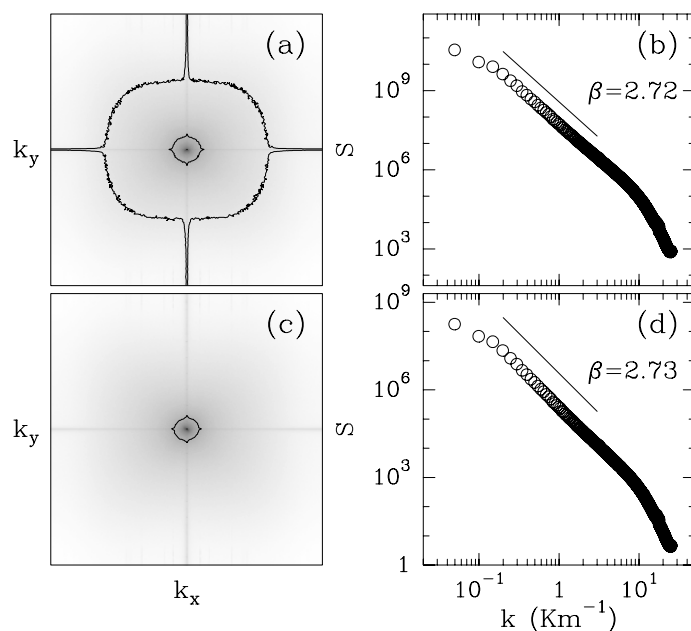


Fig. 4.3 – Analyse spectrale des 32 images (1024×1024) Landsat du type de celles illustrées dans les figures 4.2a et 4.2b. Radiance : (a) $\ln |\hat{I}(\mathbf{k})|$; (b) $S(|\mathbf{k}|)$ en fonction de $|\mathbf{k}|$ dans une représentation logarithmique. Épaisseur optique : (c) $\ln |\hat{I}(\mathbf{k})|$; (d) $S(|\mathbf{k}|)$ en fonction de $|\mathbf{k}|$ dans une représentation logarithmique. Les droites indiquent la gamme d'échelles sur laquelle ont été effectués les régressions linéaires. Les images sont codées du blanc (min) au noir (max). Les traits pleins dans les figures (a) et (c) correspondent à des courbes de niveaux.

sont pas pollués par les effets de bords (voir section 2.4.3, page 74) qui affectent la convolution numérique utilisée pour le calcul de la transformée en ondelettes. La zone ainsi pavée recouvre une superficie d'environ 7840 km^2 . La figure 4.2a représente le champ de radiance codé sur 8 bits de l'une de ces parties centrales. On remarque clairement la présence de structures orientées qui donnent la texture anisotrope dominante dans la figure 4.1. Cette texture résulte de la formation de rouleaux de convection qui sont généralement alignés dans la direction du vent. Nous avons effectué diverses coupes horizontales et verticales dans l'image de la figure 4.2a; les profils obtenus sont représentés dans les figures 4.2c et 4.2e. On retrouve sur ces profils la présence de modulations relativement régulières correspondant aux rouleaux de convection, qui se superposent aux fluctuations intermittentes du champ de radiance. La figure 4.3 contient les résultats de l'analyse spectrale des 32 images (1024×1024) du champ de radiance. L'image de la figure 4.3a représente le logarithme de la moyenne des transformées de Fourier de ces images. On retrouve encore une fois la manifestation des rouleaux de convection dans l'anisotropie que présente cette image dans une direction proche de $-\pi/6$, à savoir la direction perpendiculaire à l'axe des rouleaux. Dans la figure 4.3b, nous montrons l'évolution de la densité spectrale $S(k)$ en fonction de $k = |\mathbf{k}|$ dans une représentation logarithmique. Cette courbe présente deux

cassures nettes : une pour $k \simeq 0.2-0.4 \text{ km}^{-1}$ et une pour $k \simeq 6 \text{ km}^{-1}$. Entre ces deux valeurs, le spectre présente un comportement en loi de puissance bien défini :

$$S(k) \sim k^{-\beta}, \quad (4.1)$$

avec $\beta = 2.72 \pm 0.08$. Ce résultat est tout à fait compatible avec les mesures spectrales précédemment effectuées sur les signaux LWC 1D [223,239,259,266–272,274–276], qui s'accordent sur le domaine suivant pour la valeur de l'exposant spectral : $\beta_{LWC} = 1.4-1.7 \simeq \beta_{2D} - 1$. L'amorce de transition vers un plateau observé dans $S(k)$ à grandes échelles ($> 6 \text{ km}$) indique la présence d'une sorte d'échelle intégrale dans ces images de Sc marins. Cette échelle correspond précisément à la taille caractéristique des rouleaux de convection. Cette observation suggère que s'il existe incontestablement des corrélations à l'intérieur des rouleaux, ceux-ci interagissent peu les uns avec les autres. La densité spectrale possède un troisième régime pour des échelles inférieures à $0.2-0.4 \text{ km}$ où la pente extraite des données devient très négative, signe d'une transition vers un comportement beaucoup plus doux et régulier. L'interprétation de cette transition a été le sujet d'une violente controverse dans la littérature [239,257,259,274–276]. Cahalan et Snider [274] ont souligné la concordance entre cette échelle et l'épaisseur des Sc marins. Cependant, aucune transition nette n'est observée dans les études 1D des fluctuations de LWC dans les Sc marins : un comportement en loi de puissance bien défini est obtenu depuis des distances de quelques dizaines de mètres jusqu'à des distances de plusieurs dizaines de kilomètres [257,272,273]. Cette constatation suggère que l'explication de cette transition ne se trouve pas au niveau des mécanismes dynamiques sous-jacents à la structure des Sc marins. Lovejoy et ses collaborateurs [275] font preuve d'un certain scepticisme à l'égard de toute interprétation à caractère physique de ce phénomène. Ils soulèvent en effet deux problèmes techniques qui pourraient expliquer l'interruption du comportement en loi de puissance de la densité spectrale à petite échelle : d'une part le radiomètre est sujet à des effets de saturation dans certaines zones nuageuses ; d'autre part la majorité des analyses publiées à ce jour souffre cruellement d'un manque de statistique. Nous tenons à faire remarquer à ce sujet que les images que nous étudions ne présentent pas plus de 1.25% de saturation et que notre échantillon statistique – 32 images (1024×1024) – est largement suffisant pour obtenir une convergence statistique très raisonnable du comportement spectral en loi de puissance. Par régression linéaire des données entre 70 m et 300 m, nous obtenons une valeur de l'exposant spectral $\beta \simeq 5.0$; toutefois, nous ne pouvons pas exclure la possibilité d'une décroissance exponentielle de la densité spectrale pour les grands vecteurs d'onde. Dans ces conditions, nous sommes plutôt partisans de l'interprétation physique de Davis *et al* [239,286], qui suggèrent que la présence de cette transition vers des comportements adoucis du champ de radiance aux petites échelles provient de flux horizontaux de photons occasionnés par l'hétérogénéité des couches des Sc marins [291–294]. Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [239], où une simulation de ce phénomène a été menée avec succès, confirmant que l'origine de cette observation est bien un phénomène de transport radiatif.

La discussion précédente est primordiale. En effet, il est important de savoir dans quelle mesure le champ de radiance mesuré par la caméra TM du satellite Landsat rend compte

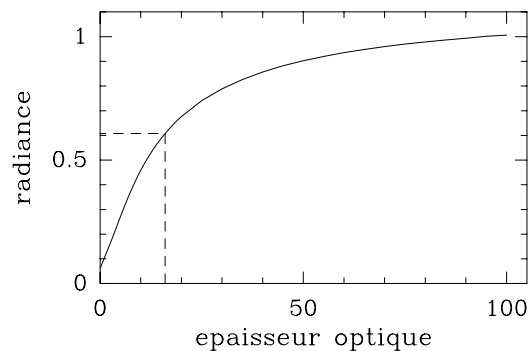


Fig. 4.4 – Relation entre la radiance et l'épaisseur optique d'après le logiciel DISORT [284] basé sur la théorie des plans parallèles et l'approximation des pixels indépendants (IPA). Les traits interrompus indiquent les valeurs maximales atteintes par ces deux champs dans la collection d'images Landsat dont nous disposons.

de la structure interne des nuages Sc marins. Les résultats des diverses analyses des fluctuations des données LWC obtenues lors des programmes ASTEX et FIRE, indiquent que les modèles réalistes de l'épaisseur optique se doivent de rendre compte d'un comportement en loi de puissance de la densité spectrale sur une gamme d'échelles supérieure à trois décades [223, 239, 259, 266–276]. En particulier, pour le programme FIRE, les données présentent un comportement en loi d'échelle bien défini jusqu'à des distances de l'ordre de 20-40 m, c'est-à-dire jusqu'à la limite de la résolution de la caméra TM. Se pose maintenant la question de la relation entre la radiance et l'épaisseur optique. Dans les Réfs [261, 274, 285], Cahalan *et al* proposent d'appliquer l'approximation des pixels indépendants (IPA, de l'anglais *independent pixel approximation*) pour calculer le champ de radiance qui s'échappe d'un nuage horizontalement inhomogène dans la théorie des plans parallèles [239]. La figure 4.4 montre la courbe non-linéaire que fournit le logiciel DISORT de Stammes *et al* [284] qui, sur la base de cette approximation, permet d'obtenir la radiance à partir de l'épaisseur optique. Cette courbe étant monotone, on peut l'inverser et obtenir le champ « épaisseur optique » à partir des données Landsat de radiance. Le résultat de cette opération est illustré dans les figures 4.2b, 4.2d et 4.2f. On ne distingue pas de différence notable entre ces nouvelles données et celles représentées dans les figures 4.2a, 4.2c et 4.2e pour le champ de radiance. D'un point de vue plus quantitatif, on constate dans les figures 4.3c et 4.3d que l'analyse spectrale de l'épaisseur optique donne des résultats très proches de ceux obtenus pour la radiance. En particulier, on observe toujours la transition vers des comportements plus doux aux échelles inférieures à 300-400 m, transition qui, d'après Davis et ses collaborateurs [239, 286], ne devrait pas être présente dans le champ épaisseur optique. Cependant ces auteurs soulignent, dans la Réf. [239], que comme l'IPA consiste à manipuler les pixels indépendamment les uns des autres, on ne peut espérer engendrer, à partir de l'épaisseur optique, un champ de radiance présentant une transition vers un comportement adouci aux petites échelles puisque cette transition est sensée résulter d'une sorte « d'interaction entre les pixels ». Il est donc compréhensible qu'inversement, le passage de la radiance à

l'épaisseur optique par IPA n'efface pas la manifestation des phénomènes de transport horizontal des photons observée aux petites échelles dans la densité spectrale. Précisons que la Réf. [239] présente une simulation de Monte-Carlo de ces processus de transport qui rend parfaitement compte du bon comportement des fluctuations du champ de radiance à ces petites échelles et qui montre qu'à des distances supérieures, l'IPA est une méthode tout à fait fiable pour passer de la radiance à l'épaisseur optique et vice versa.

Remarque

Précisons que la résolution de notre microscope mathématique, la transformation en ondelettes, ne nous permet pas d'accéder à des détails suffisamment fins pour que l'on puisse étudier quantitativement cette transition vers des comportements plus réguliers aux petites échelles. En effet, la plus petite échelle résolue correspond à $\sigma_W = 13$ pixels (voir section 1.3.3, page 33), soit approximativement 390 m. Sur la gamme d'échelles investie lors des études rapportées dans ce chapitre, nous considérerons que la radiance fournit une information directe sur la structure des Sc marins. Comme l'indique la figure 4.4, l'amplitude des fluctuations de radiance enregistrées par le satellite Landsat demeure suffisamment modeste pour ne mettre en jeu que la partie quasiment linéaire de la courbe de passage de l'épaisseur optique (structure du nuage) à la radiance.

4.3 Application de la méthode MMTO 2D aux images Landsat de nuages stratocumulus marins

Dans cette section, nous utilisons la méthode MMTO 2D pour caractériser statistiquement les fluctuations de rugosité des images Landsat (Fig. 4.1). La démarche que nous adoptons suit méthodiquement les étapes de calcul présentées dans la section 2.4.3 (page 74). Dans un premier temps, nous calculons les transformées en ondelettes des 32 images (1024×1024) constituant le pavage de l'image de la figure 4.1, avec une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ (Figs 2.1a et 2.1b). Après sélection des MMMTO sur les chaînes de maxima calculées à chaque échelle, nous chaînons à travers les échelles ces MMMTO pour former le squelette de la transformée en ondelettes. À partir du calcul de fonctions de partition sur ce squelette, nous estimons les spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ (voir section 2.4.1, page 70). Afin de nous assurer de la fiabilité de nos estimations, nous vérifions que les résultats obtenus sont robustes lorsque l'on augmente l'ordre de l'ondelette analysatrice.

4.3.1 Calcul numérique des spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$

Dans la figure 4.5, nous présentons les résultats du calcul du squelette de la transformée en ondelettes de l'image (1024×1024) illustrée dans la figure 4.2a. En toile de fond dans la figure 4.5b, nous montrons le résultat à l'échelle $a = 2^{2.9}\sigma_W$, de la convolution de l'image étudiée (Fig. 4.5a) avec la Gaussienne comme fonction lissante ϕ_a . Les chaînes

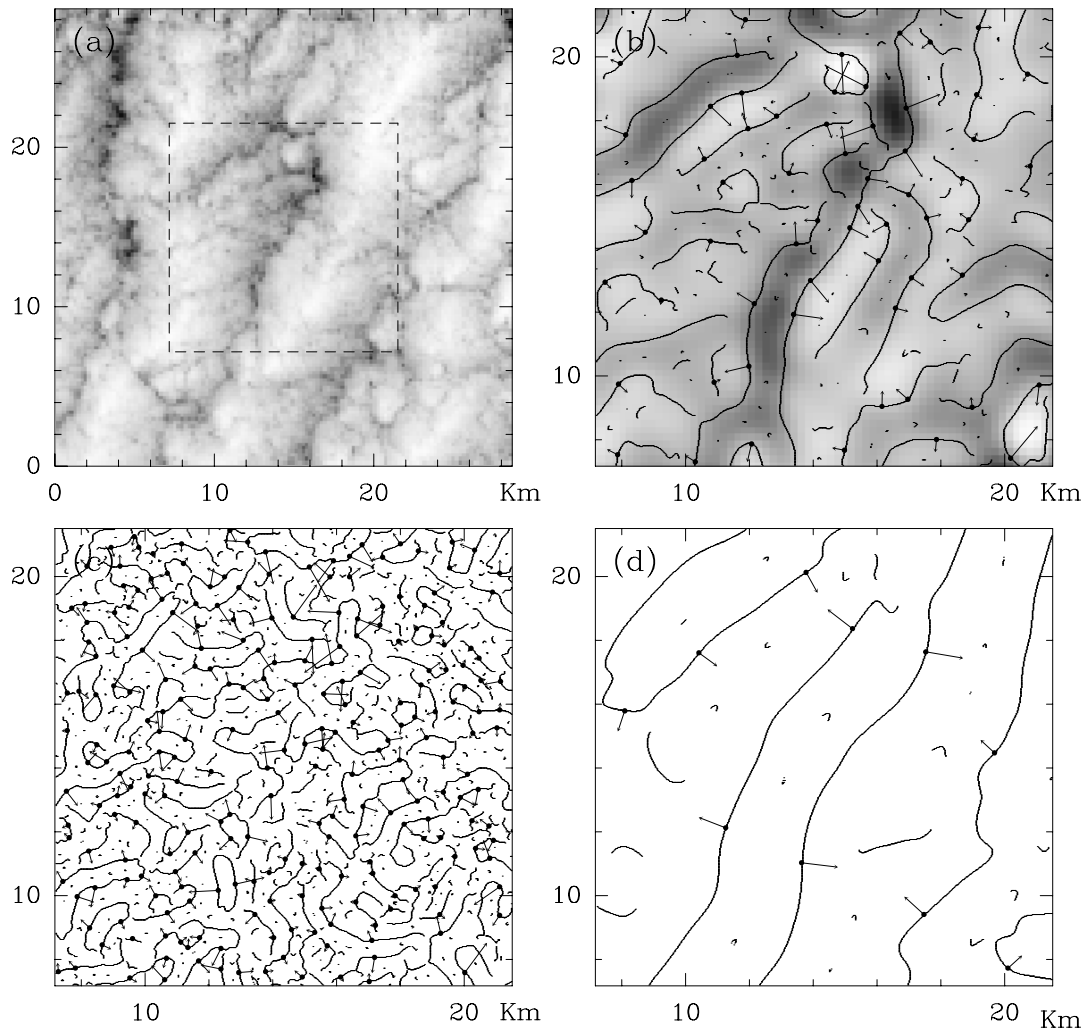


Fig. 4.5 – Analyse en ondelettes 2D d’une image Landsat de nuage stratocumulus marin. ψ est une ondelette à symétrie radiale d’ordre $n_\psi = 1$ (Fig. 2.1, page 49). (a) Image étudiée (1024×1024) codée du noir (min) au blanc (max). Les chaînes de maxima (trait plein) et le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ (flèche) aux MMMTO (\bullet) sont représentés pour les échelles $a = 2^{2.9}\sigma_W$ (b), $2^{1.9}\sigma_W$ (c) et $2^{3.9}\sigma_W$ (d) (avec $\sigma_W = 13$ pixels $\simeq 390$ m). Le fond en nuances de gris dans (b) représente le résultat de la convolution de l’image avec la fonction lissante Gaussienne ϕ_a à l’échelle $a = 2^{2.9}\sigma_W$. (b), (c) et (d) correspondent à la partie centrale de l’image originale délimitée par un carré en trait interrompu dans (a).

de maxima (trait pleins) et le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ (flèches) associé aux MMMTO (\bullet) du squelette sont aussi représentés. On constate que les chaînes de maxima délimitent les contours de l'image lissée, que les gradients pointent (\mathcal{A}_ψ) vers ces structures et que le module \mathcal{M}_ψ de \mathbf{T}_ψ est d'autant plus grand que ces contours sont nets. Après chaînage des MMMTO à travers les échelles, on construit le squelette de la transformée en ondelettes à partir duquel sont calculées les fonctions de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ (Éq. (2.59), page 70). La figure 4.6a montre, dans une représentation logarithmique, les résultats du calcul de la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ en fonction de a (\bullet), pour plusieurs valeurs de q . Les résultats correspondent à une moyenne recuite sur 32 images (1024×1024) du champ de radiance. Ces points présentent un comportement linéaire relativement bien défini sur une gamme d'échelles d'environ trois octaves $390 \text{ m} \lesssim a \lesssim 3120 \text{ m}$. En réalité le comportement en loi de puissance de $\mathcal{Z}(q, a)$ se détériore progressivement lorsque l'on atteint des valeurs de $|q| \gtrsim 3$. Nous verrons plus loin, qu'au delà des problèmes de convergence statistique, la présence de structures localisées dans les images Landsat permet de comprendre pourquoi la transition observée dans la figure 4.6 vers une pente beaucoup plus importante à grande échelle, se décale progressivement vers les petites échelles lorsqu'on augmente $q > 0$. Il est clair que pour $q \gtrsim 3$, l'échelle où survient cette transition $a^* \lesssim 1200 \text{ m}$ devient significativement plus petite que la taille caractéristique $\lambda \simeq 5$ à 6 kms des rouleaux de convection. Dans ces conditions, nous nous sommes attachés à estimer les exposants $\tau(q)$ du comportement en loi de puissance des fonctions de partition $\mathcal{Z}(q, a)$, par simple régression linéaire des données de la figure 4.6a sur la première octave et demi où le comportement en loi de puissance est bien définie. Le spectre $\tau(q)$ ainsi obtenu est représenté par les symboles (\bullet) dans la figure 4.6b. Ce spectre dévie clairement du comportement linéaire caractéristique des surfaces monofractales. La comparaison avec le spectre $\tau(q)$ obtenu dans le cas des surfaces Browniennes fractionnaires dans la figure 2.20 (page 86) est éloquent à ce sujet. Le caractère non-linéaire des données dans la figure 4.6b est la signature de la nature multifractale des nuages Sc marins. Par transformation de Legendre de ce spectre $\tau(q)$, on obtient le spectre des singularités $D(h)$ illustré dans la figure 4.6c. La forme en cloche de ce spectre, dont le support s'étale sur un intervalle important de valeurs de l'exposant de Hölder h , confirme l'existence de fluctuations de rugosité dans les images Landsat. Le maximum de cette courbe, $D(h(q=0)) = 2.00 \pm 0.02$, est une forte indication du fait que le champ de radiance est singulier partout. Afin de tester la fiabilité de cette estimation, nous rapportons dans la figure 4.7, les résultats du calcul du spectre $D(h)$ à partir cette fois des grandeurs $h(q, a)$ et $D(q, a)$ définies dans les équations (2.66) et (2.67) (page 72). Le comportement de ces grandeurs en fonction de $\log_2 a$ (\bullet) permet d'estimer les exposants $h(q)$ et $D(q)$ pour différentes valeurs de q et d'en déduire la courbe $D(h)$. On constate sur la figure 4.7a que $h(q, a)$ présente le même type de comportement dans les échelles que $\log_2 \mathcal{Z}(q, a)$. En effet, si $h(q, a)$ présente un comportement linéaire en fonction de $\log_2 a$ sur au moins une octave et demi, on observe à grande échelle une certaine inflexion dans les données qui perturbe de plus en plus le comportement linéaire lorsque l'on augmente la valeur de q . Une régression linéaire effectuée à nouveau à petite échelle permet donc d'extraire les exposants $h(q)$. Notons que sur la figure 4.7b, les données pour $D(q, a)$ présentent un comportement linéaire qui est moins perturbé que pour $h(q, a)$ et qui semble se prolonger

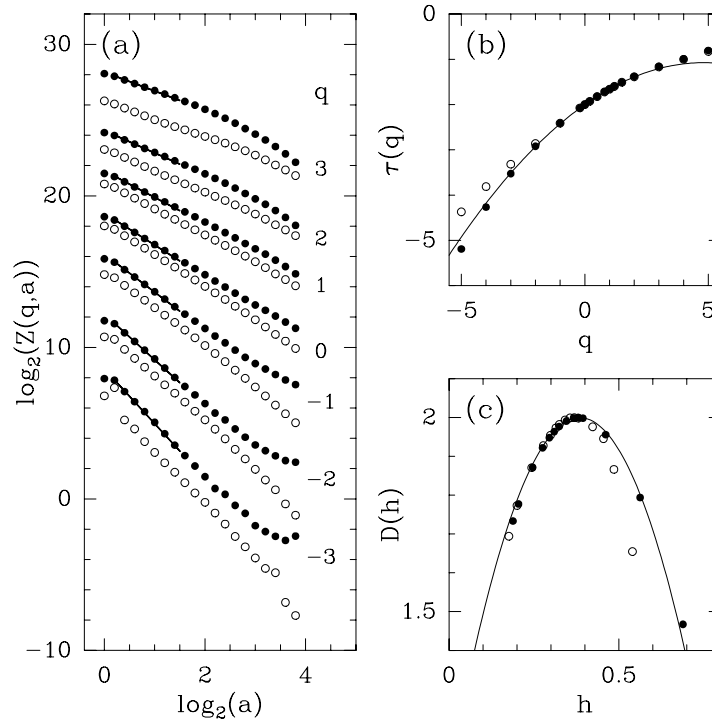


Fig. 4.6 – Détermination des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ des images Landsat du champ de radiance de stratocumulus marins. L'ondelette analysatrice utilisée est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ (\bullet) ou d'ordre $n_\psi = 3$ (\circ). (a) $\log_2 \mathcal{Z}(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$; les droites en trait plein correspondent à des régressions linéaires des données sur une octave et demi. (b) $\tau(q)$ en fonction de q , obtenu via les pentes des régressions linéaires de la figure (a). (c) $D(h)$ en fonction de h , obtenu par transformation de Legendre des données pour le spectre $\tau(q)$ dans (b). Dans (b) et (c), les traits pleins correspondent aux prédictions théoriques des spectres multifractals pour une cascade \mathcal{W} log-normale de paramètres $m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.07 \ln 2$ (Éqs (3.29) et (3.30), page 122). Ces résultats concernent une moyenne recuite sur 32 images (1024×1024). Les échelles a sont exprimées en unité $\sigma_{\mathcal{W}}$.

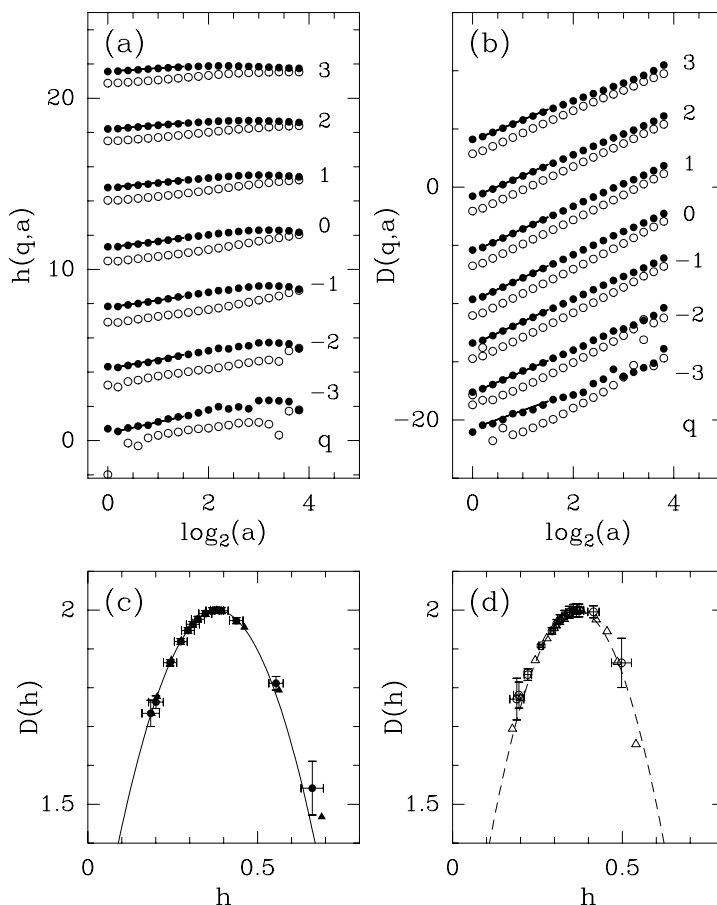


Fig. 4.7 – Détermination du spectre des singularités $D(h)$ des images Landsat du champ de radiance de stratocumulus marins. L'ondelette analysatrice utilisée est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ (\bullet et \blacktriangle) ou d'ordre $n_\psi = 3$ (\circ et \triangle). (a) $h(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$. (b) $D(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$. (c) $n_\psi = 1$: $D(h)$ en fonction de h , obtenu par régression linéaire des courbes dans (a) et (b) sur une octave et demi (\bullet); les symboles (\blacktriangle) correspondent au spectre $D(h)$ obtenu par transformée de Legendre du spectre $\tau(q)$ de la figure 4.6b. (d) $n_\psi = 3$: $D(h)$ en fonction de h ; mêmes calculs que dans (c) mais avec une ondelette analysatrice du troisième ordre. Dans (c) et (d), les traits pleins et interrompus correspondent à la prédiction théorique du spectre des singularités des cascades \mathcal{W} log-normales pour les jeux de paramètres respectifs suivants : ($m = -0.38 \ln 2$, $\sigma^2 = 0.07 \ln 2$) et ($m = -0.366 \ln 2$, $\sigma^2 = 0.06 \ln 2$).

à plus grande échelle. Cependant une inspection plus minutieuse révèle la présence d'un léger décrochage à grande échelle. À partir de régressions linéaires effectuées sur une même gamme d'échelle que pour $h(q, a)$, on obtient les exposants $D(q)$. Pour chaque valeur de q , le couple d'exposants $(h(q), D(q))$ nous donne un point du spectre $D(h)$ représenté par les symboles (●) dans la figure 4.7c. Ce spectre a non seulement la même allure en forme de cloche que celui obtenu par transformation de Legendre du spectre $\tau(q)$ (▲), mais les « barres d'erreur » obtenues en faisant varier l'intervalle sur lequel la régression linéaire est effectuée, montrent qu'il est impossible de distinguer les deux spectres $D(h)$, ce qui apporte la preuve de la fiabilité de notre estimation. Ce remarquable accord illustre aussi le degré de confiance que l'on peut attribuer au diagnostic que nous avons établi concernant la nature multifractale du champ de radiance des nuages Sc marins.

Comme nous l'avons signalé plus haut, $\mathcal{Z}(q, a)$ et $h(q, a)$ présentent deux régimes différents suivant deux gammes d'échelles. Cela est net sur la figure 4.7a où $h(q, a)$ présente un maximum à une échelle donnée. Pour des valeurs de $q < 1$, l'échelle de ce changement de régime ne dépend pas de q et elle est de l'ordre de la taille des rouleaux $\lambda \simeq 5-6$ km. Nous retrouvons bien l'échelle intégrale de la structure multifractale des Sc marins précédemment évoquée lors de l'analyse spectrale de ces mêmes images. Même si l'étendue de la gamme d'échelles concernée ne nous permet pas de mesurer avec précision la valeur de la pente négative observée à grande échelle pour $q > 1$, un début de tendance décroissante pour $h(q, a)$ est clairement observée à partir d'une échelle qui est de plus en plus petite au fur et à mesure que l'on augmente q . Cette observation est caractéristique d'un phénomène de compétition entre deux catégories de singularités dans le calcul des fonctions de partition. La première catégorie est constituée des singularités qui gouvernent les propriétés multifractales décrites plus haut. En particulier, comme $D(q = 0) = 2$, ces singularités sont présentes en presque tous les points de l'image. Comme nous le précisons dans la section 4.3.3, la deuxième catégorie concerne des singularités isolées qui correspondent à des structures très localisées en forme de pics de Dirac. Ces structures peuvent donc être assimilées à des singularités d'exposant de Hölder négatif. Ces singularités sont donc des singularités fortes (comparativement à la plage de valeurs de l'exposant de Hölder $0 \lesssim h \lesssim 0.7$ pour les singularités de la première catégorie), mais elles sont isolées ce qui signifie que le nombre des MMMTO correspondant reste le même à toutes les échelles, contrairement à la prolifération en a^{-2} des MMMTO associées aux singularités de la première catégorie. Ainsi, à petite échelle, même si le module de ces MMMTO prend des valeurs de plus en plus grandes, paradoxalement leur influence dans $\mathcal{Z}(q, a)$ diminue à cause de la prolifération des MMMTO associées aux singularités de la première catégorie. Il faut donc accéder à de très grandes valeurs de q pour voir la dominance de ces structures locales sur le comportement multifractal global dans la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$ (Éq. (2.59), page 70). En suivant le même raisonnement pour les autres échelles, on peut affirmer que l'échelle où l'on commence à percevoir cette compétition augmente lorsque q diminue. Ainsi, il faut être prudent lors du choix de la gamme d'échelles sur laquelle on effectue les différentes régressions linéaires. Dans le cas présent, nous pouvons considérer que pour $q \lesssim 5$, le comportement multifractal des Sc marins n'est pas pollué par la présence de ces structures isolées sur au moins une octave et demi, c'est-à-dire sur des distances 390 m

$\lesssim a \lesssim 1102$ m.

Dans les figures 4.6 et 4.7, nous avons aussi représenté les résultats (\circ et Δ) obtenus lorsque l'on utilise une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 3$, c'est-à-dire lorsque la fonction lissante ϕ est le chapeau mexicain. On constate sur les figures 4.6a et 4.7a que l'échelle où survient le changement de régime évoqué plus haut, est légèrement supérieure à celle observée précédemment avec l'ondelette d'ordre $n_\psi = 1$. Ce décalage est dû au fait qu'une échelle a donnée ne correspond pas forcément à une même taille caractéristique lorsque l'on change la forme de l'ondelette analysatrice. Ainsi une structure de taille donnée est détectée à une échelle plus grande avec l'ondelette d'ordre $n_\psi = 3$ illustrée dans les figures 2.1c et 2.1d, qu'avec l'ondelette d'ordre $n_\psi = 1$ illustrée dans les figures 2.1a et 2.1b. Ajoutons à cela les problèmes de convergence statistique à grandes échelles, et on comprend les légères différences observées en changeant l'ordre de l'ondelette analysatrice. Dans tous les cas, ces remarques ne perturbent en rien la mesure des différents exposants $\tau(q)$, $h(q)$ et $D(q)$, dans la mesure où l'on restreint l'analyse sur une gamme d'échelles limitée aux petites échelles. Ainsi, une régression linéaire des données de la figure 4.6a sur la même gamme d'échelles que celle utilisée avec l'ondelette d'ordre $n_\psi = 1$, conduit au spectre $\tau(q)$ représenté par les symboles (\circ) dans la figure 4.6b pour l'ondelette d'ordre $n_\psi = 3$. On constate que le changement d'ondelette n'a absolument pas changé la forme de ce spectre, excepté pour les valeurs $q \lesssim -2$. Le spectre des singularités $D(h)$ obtenu par transformation de Legendre est représenté par les symboles (\circ) dans la figure 4.6c. On constate, de même, que ce spectre est identique à celui obtenu avec l'ondelette d'ordre $n_\psi = 1$, excepté pour sa partie décroissante (qui correspond aux valeurs négatives de q). Ainsi le support du spectre $D(h)$ obtenu avec l'ondelette d'ordre $n_\psi = 3$ est plus étroit à cause d'un décalage vers la gauche de sa partie décroissante (valeurs de h proche de h_{\max}) par rapport au spectre obtenu précédemment. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2, l'existence de comportements réguliers peut être mal interprétée et conduire à une surestimation de la borne supérieure (h_{\max}) du support du spectre $D(h)$ lorsque l'on utilise une ondelette analysatrice qui n'a pas suffisamment de moments nuls. En particulier, les rouleaux de convection présents dans les Sc marins ont pour effet d'ajouter une composante douce aux fluctuations de l'image (Fig. 4.2) susceptible d'introduire un biais dans l'estimation des spectres $\tau(q)$ ($q < 0$) et $D(h)$. Lorsque l'on utilise la deuxième méthode d'estimation du spectre $D(h)$ via le calcul de $h(q, a)$ et $D(q, a)$, on obtient le spectre représenté par les symboles (\circ) dans la figure 4.7d, qui ne présente aucune différence significative avec celui obtenu par transformation de Legendre de $\tau(q)$ (Δ) et qui confirme donc la validité de notre estimation.

Comme le révèlent les figures 4.6 et 4.7, les spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ obtenus ont une forme parabolique compatible avec les spectres théoriques des cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales (Éqs (3.29) et (3.30), page 122) :

$$\tau(q) = -\frac{\sigma^2}{2 \ln 2} q^2 - \frac{m}{\ln 2} q - 2, \quad (4.2)$$

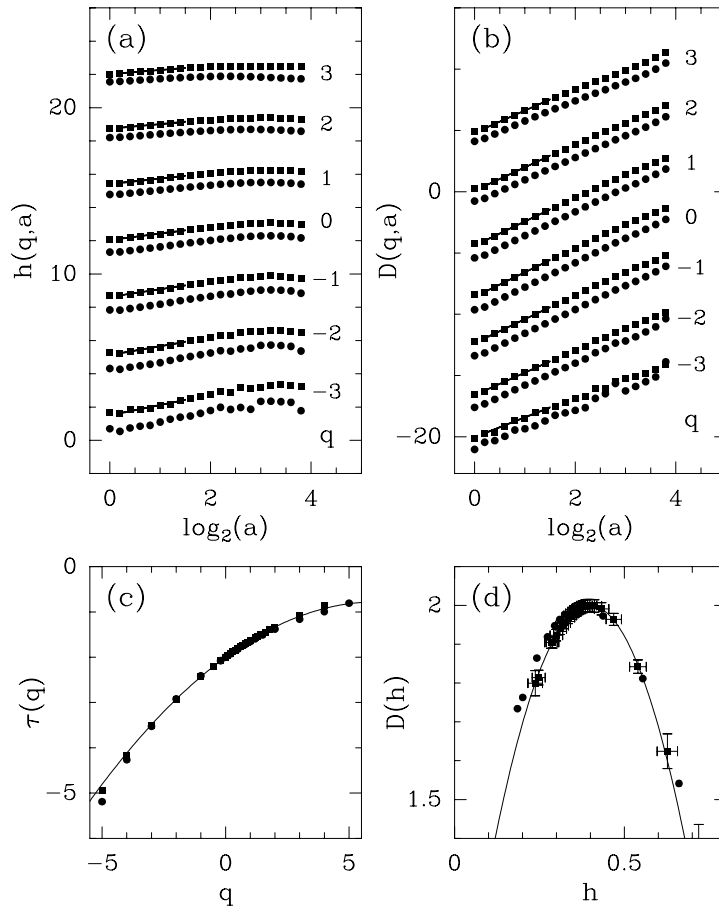


Fig. 4.8 – Détermination des spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ du champ de radiance (\bullet) et du champ de l'épaisseur optique (\blacksquare) des Sc marins. L'ondelette analysatrice utilisée est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. (a) $h(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$. (b) $D(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$. (c) $\tau(q)$ en fonction de q ; mêmes calculs que dans la figure 4.6b. (d) $D(h)$ en fonction de h ; mêmes calculs que dans la figure 4.7c. Dans (c) et (d), les traits pleins correspondent aux prédictions théoriques des spectres multifractals pour une cascade \mathcal{W} log-normale de paramètres $m = -0.399 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.065 \ln 2$.

et

$$D(h) = -\frac{(h + m/\ln 2)^2}{2\sigma^2/\ln 2} + 2. \quad (4.3)$$

Les paramètres qui conduisent à un meilleur accord avec les données expérimentales sont respectivement $m = -0.38 \ln 2 = -0.263$ et $\sigma^2 = 0.07 \ln 2 = 0.049$ pour l'ondelette d'ordre $n_\psi = 1$, et $m = -0.366 \ln 2 = -0.254$ et $\sigma^2 = 0.06 \ln 2 = 0.042$ pour l'ondelette d'ordre $n_\psi = 3$. La différence entre les valeurs du paramètre σ^2 , qui quantifie l'intermittence présente dans le champ de radiance des Sc marins, peut résulter, comme nous venons de le suggérer, de l'inaptitude de l'ondelette analysatrice d'ordre $n_\psi = 1$ à s'affranchir des composantes douces présentes dans les images analysées. Nous verrons dans la section 4.3.2 que l'estimation de σ^2 est rendue très délicate par les problèmes de convergence statistique liés au nombre limité (32) d'images à notre disposition. Notons que l'estimation de $\tau(q = 2) = -1.38 \pm 0.02$ correspond à la valeur suivante de l'exposant spectral, $\beta = \tau(2) + 4 = 2.62 \pm 0.02$, valeur qui est légèrement différente de celle obtenue par analyse spectrale, $\beta = 2.72$, dans la figure 4.3b. Cette différence provient du fait que l'intervalle de valeurs du module du vecteur d'onde $|\mathbf{k}|$ utilisé pour estimer β à partir de la densité spectrale ne correspond pas tout à fait à la gamme d'échelles utilisée pour estimer $\tau(q)$ à partir du comportement en loi de puissance de la fonction $\mathcal{Z}(q = 2, a)$.

Afin de vérifier la pertinence de la remarque émise à la fin de la section 4.2, nous avons répété les calculs des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ avec la méthode MMTO 2D, mais cette fois sur le champ de l'épaisseur optique des Sc marins obtenu à partir des images du champ de radiance en utilisant la loi de transformation (donnée par le logiciel DISORT) illustrée dans la figure 4.4. Ces résultats sont représentés par les symboles (■) dans la figure 4.8. On ne constate aucune différence significative entre ces nouveaux spectres et ceux précédemment calculés pour le champ de radiance (●) dans la gamme de valeurs de q ($-3 \lesssim q \lesssim 5$) où l'on est assuré que ces spectres ont convergé vers leurs valeurs asymptotiques. Cela confirme que la donnée du champ de radiance permet de caractériser statistiquement la structure interne des Sc marins sur une gamme d'échelles allant de quelques centaines de mètres à quelques kilomètres.

4.3.2 Densité de probabilité des MMMTO

Cette section est consacrée à l'étude de la densité de probabilité $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ du vecteur gradient associé aux MMMTO qui composent les squelettes des transformées en ondelettes des 32 images (1024×1024) du champ de radiance, calculés avec une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. La figure 4.9 représente les pdfs $P_a(\mathcal{M}) = \int d\mathcal{A} P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $P_a(\mathcal{A}) = \int d\mathcal{M} P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ pour trois échelles d'analyse différentes [129] $a = 2^{0.3}\sigma_W$ (480 m), $2^{1.3}\sigma_W$ (960 m) et $2^{2.3}\sigma_W$ (1920 m). Intéressons nous, dans un premier temps, aux pdfs $P_a(\mathcal{A})$ de l'argument \mathcal{A}_ψ qui sont représentées dans la figure 4.9b. On constate que lorsque l'échelle augmente, cette densité se pique de plus en plus aux valeurs $\mathcal{A}_\psi = -\pi/6$ et $5\pi/6$. Ces angles privilégiés correspondent en fait à la direction perpendiculaire à la direction moyenne

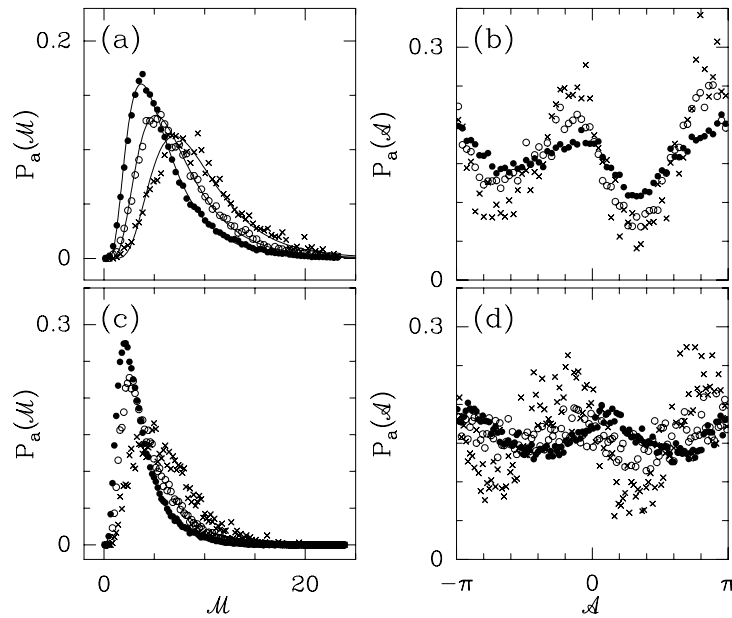


Fig. 4.9 – Pdfs des coordonnées polaires du vecteur gradient associé aux MMMTO des 32 images (1024×1024) du champ de radiance. Ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$: (a) $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M} ; (b) $P_a(\mathcal{A})$ en fonction de \mathcal{A} ; les symboles ont la signification suivante $a = 2^{0.3}\sigma_W = 480$ m (\bullet), $2^{1.3}\sigma_W = 960$ m (\circ) et $2^{2.3}\sigma_W = 1920$ m (\times). Ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 3$: (c) $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M} ; (d) $P_a(\mathcal{A})$ en fonction de \mathcal{A} ; les symboles ont la signification suivante $a = 2^{0.6}\sigma_W = 591$ m (\bullet), $2^{1.6}\sigma_W = 1182$ m (\circ) et $2^{2.6}\sigma_W = 2364$ m (\times).

des rouleaux de convection. Cette observation suggère que l'influence de l'organisation à grande échelle des rouleaux – la modulation douce observée dans les coupes 1D dans les figures 4.2c et 4.2e – est de plus en plus importante lorsqu'on augmente le paramètre échelle a et qu'elle dicte le comportement des MMMTO au delà d'une échelle qui est de l'ordre de la taille caractéristique de ces derniers. Cela confirme que l'étude des propriétés multifractales de la sous-section précédente doit se faire pour des échelles inférieures à cette taille.

Les figures 4.9c et 4.9d représentent les pdfs $P_a(\mathcal{M})$ et $P_a(\mathcal{A})$ obtenues avec une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 3$. On constate que l'anisotropie, qui est toujours présente, est moins forte et évolue plus lentement avec l'échelle que précédemment. Cela confirme qu'avec une ondelette d'ordre suffisamment élevé, l'estimation des spectres multifractals est moins sensible à la composante régulière introduite par la texture anisotrope induite par les rouleaux de convection. De plus, ces angles privilégiés semblent être légèrement différents lorsqu'on change d'échelle. Afin de nous persuader que cet effet n'est pas un comportement local systématique le long de chaque ligne de maxima, revenons sur l'organisation des rouleaux de convection dans la figure 4.1. On constate que suivant la zone observée, ceux ci ont une taille et une direction variables. Les fluctuations de direction privilégiée sur de très grandes distances dans la texture anisotrope imposée par les phénomènes convectifs, peuvent donc expliquer les légères fluctuations de la forme de $P_a(\mathcal{A})$ à

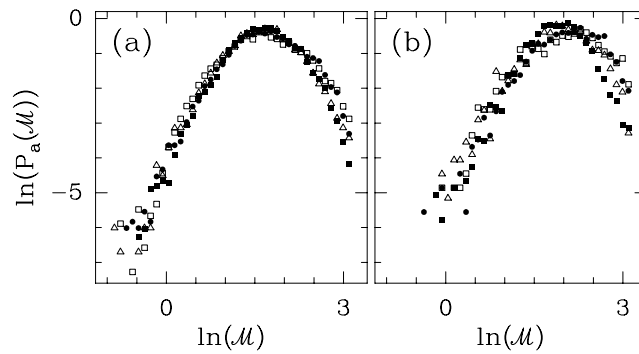


Fig. 4.10 – Pdf du module \mathcal{M}_ψ des MMMTO conditionnée par la valeur de l'argument \mathcal{A}_ψ . L'ondelette analysatrice est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. (a) $a = 2^{0.3}\sigma_W = 480$ m; (b) $a = 2^{1.3}\sigma_W = 960$ m. Les différents symboles correspondent aux valeurs suivantes de l'argument $\mathcal{A}_\psi \pmod{\pi}$: $0 \pm \pi/8$ (\circ), $\pi/4 \pm \pi/8$ (\square), $\pi/2 \pm \pi/8$ (\triangle) et $3\pi/4 \pm \pi/8$ (\blacksquare).

travers les échelles. Ceci étant, le fait que $P_a(\mathcal{A})$ soit beaucoup plus plate avec l'ondelette d'ordre $n_\psi = 3$ (Fig. 4.9d), nous conforte dans la conviction que le champ de radiance des nuages Sc marins possèdent des propriétés d'invariance d'échelle multifractales isotropes.

La figure 4.10 illustre le comportement de la densité de probabilité du module \mathcal{M}_ψ conditionnée par la valeur de l'argument \mathcal{A}_ψ . On constate que pour chacune des deux échelles examinées dans les figures 4.10a ($a = 2^{0.3}\sigma_W$) et 4.10b ($a = 2^{1.3}\sigma_W$), les différentes courbes obtenues pour différentes valeurs de l'argument \mathcal{A}_ψ se superposent sur une même courbe, apportant par là, la preuve expérimentale que les variables aléatoires \mathcal{M}_ψ et \mathcal{A}_ψ sont statistiquement indépendantes. Cette observation suggère que l'on peut factoriser $P_a(\mathcal{M})$ et $P_a(\mathcal{A})$ dans l'expression de la densité de probabilité $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ (Fig. 4.11) :

$$P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = P_a(\mathcal{M})P_a(\mathcal{A}). \quad (4.4)$$

Notons que cette remarque concerne des échelles inférieures à la taille des rouleaux de convection. Les résultats rapportés dans la figure 4.11 concernant la distribution du vecteur gradient associé aux MMMTO dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) , ne permettent pas d'affirmer sans ambiguïté cette indépendance. On retrouve dans cette figure que le vecteur gradient \mathbf{T}_ψ tend à s'orienter dans la direction perpendiculaire à l'axe des rouleaux ($\mathcal{A}_\psi = -\pi/6$ et $5\pi/6$) lorsque a augmente. Le manque progressif de statistique nécessite que l'on intègre sur des secteurs $\mathcal{A}_\psi = \theta \pm \Delta\theta$ pour que l'on puisse espérer comparer les distributions des valeurs de \mathcal{M}_ψ à l'intérieur de ces secteurs. C'est ce que nous avons fait dans la figure 4.10, où les résultats obtenus suggèrent la validité de l'équation (4.4) pour des échelles inférieures à la taille caractéristique des rouleaux de convection.

La factorisation indiquée par l'équation (4.4), nous conforte dans notre démarche basée sur la conjecture que les propriétés multifractales des Sc marins sont entièrement contenues dans l'évolution de la forme de $P_a(\mathcal{M})$. Les figures 4.9a et 4.9c illustrent le comportement de cette pdf pour les MMMTO calculés respectivement avec des ondelettes analysatrices

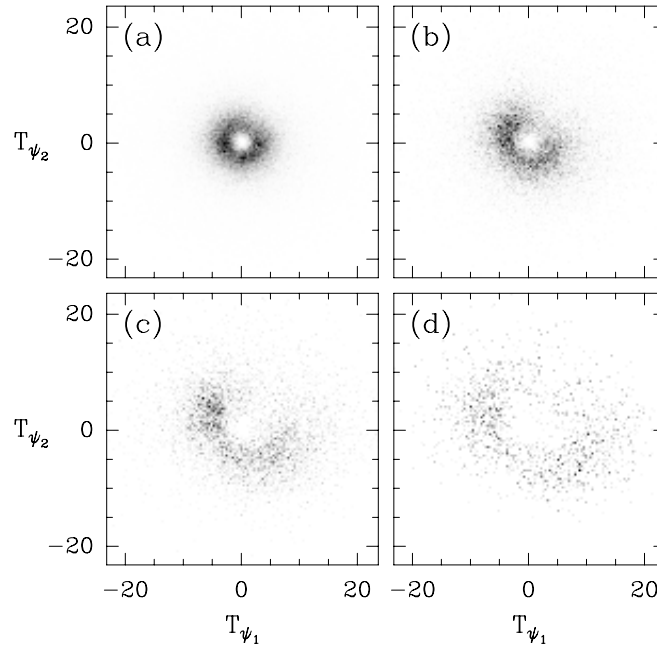


Fig. 4.11 – Représentation dans le plan (T_{ψ_1}, T_{ψ_2}) de la distribution du vecteur gradient associé aux MMTTO pour les échelles $a = \sigma_W = 390$ m (a), $2\sigma_W = 780$ m (b), $2^2\sigma_W = 1560$ m (c) et $2^3\sigma_W = 3120$ m (d). L’ondelette analysatrice est une ondelette isotrope d’ordre $n_\psi = 1$. Mêmes données que dans les figures 4.9a et 4.9b.

isotropes d’ordre $n_\psi = 1$ et $n_\psi = 3$. Dans la figure 4.12, nous avons représenté les densités $P_a(\mathcal{M})$ suivant des échelles logarithmiques. On constate que pour chaque échelle considérée, les points se mettent en bonne approximation sur une parabole. Cette observation, qui est valable pour les deux ondelettes ($n_\psi = 1$ ou 3) et pour toutes les échelles examinées significativement plus petite que la taille des rouleaux de convection, suggère que les fluctuations du champ de radiance des Sc marins suivent une statistique log-normale.

Comme nous l’avons vu dans la section 2.5.3 (page 90), un bon moyen de tester la convergence statistique du calcul des exposants $\tau(q)$ consiste à s’assurer que la forme de la distribution $\mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M})$ est bien définie sur toute la gamme d’échelle utilisée pour estimer ces exposants. Il est bien évident que les problèmes de statistique finie vont apparaître lorsque l’on va progressivement augmenter $|q|$ pour se focaliser sur les queues de la distribution $P_a(\mathcal{M})$. Dans la mesure où l’aspect de la distribution $\mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M})$ va progressivement se dégrader, cela va correspondre à une perte de précision dans le calcul de $\mathcal{Z}(q, a)/\mathcal{Z}(0, a)$ ($\sim a^{\tau(q)-\tau(0)}$) qui n’est rien d’autre que l’intégrale de cette distribution, avec comme conséquence majeure une erreur de plus en plus importante dans l’estimation de $\tau(q)$. En fait, une façon astucieuse de tester simultanément la convergence statistique et la nature multifractale des données analysées, est de vérifier la pertinence de la relation :

$$a^{-qh} \mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M}) = \mathbb{F}_q(\mathcal{M}/a^h), \quad (4.5)$$

où \mathbb{F}_q est *a priori* une fonction indépendante de l’échelle a , et h un exposant dont la possible

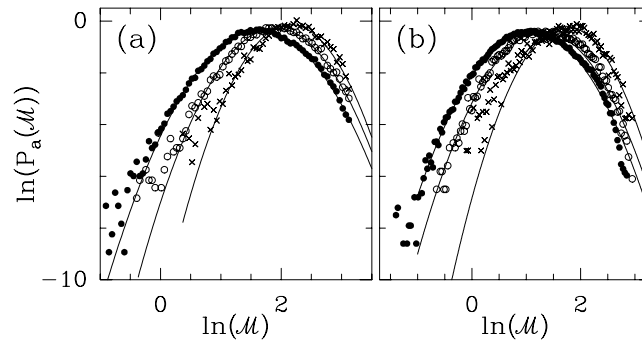


Fig. 4.12 – Pdfs du module \mathcal{M}_ψ des MMTTO de 32 images (1024×1024) du champ de radiance. $\ln(P_a(\mathcal{M}))$ en fonction de $\ln(\mathcal{M})$: (a) Ondelette analysatrice d'ordre $n_\psi = 1$; (b) Ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 3$. Les symboles ont la même signification que dans les figures 4.9a et 4.9c. Les traits pleins représentent des paraboles.

dépendance en q est cruciale pour le diagnostic multifractal. Comme nous l'avons montré dans la section 2.5.3 (page 89) pour les surfaces Browniennes fractionnaires, dans le cas des surfaces monofractales, l'exposant h dans l'équation (4.5) est le même quelle que soit la valeur de q et il est égal à l'exposant de Hurst de la surface. Dans le cas multifractal, il est nécessaire d'adapter le choix de h à la valeur de q considérée. La valeur adéquate est reliée à l'exposant $\tau(q)$ par la relation $h(q) = \partial\tau/\partial q$. La figure 4.13 illustre la validité de l'équation (4.5) pour le cas des cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales présentées dans la section 3.2.2 (page 118). Pour $-3 \lesssim q \lesssim 8$, on constate que les données correspondant à différentes échelles, se positionnent toutes sur une même fonction qui ne dépend que de q , validant ainsi l'équation (4.5) pour ces valeurs de q . Lorsque q augmente, on remarque que les données présentent un comportement de plus en plus bruité, effet d'autant plus important que a est grand. Cela nous alerte sur le fait qu'il devient de plus en plus délicat d'estimer convenablement l'intégrale de $\mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M})$ nécessaire au calcul de la fonction de partition $\mathcal{Z}(q, a)$. De même, on constate que pour $q = -4$ (Fig. 4.13a), les données ne se superposent plus et sont assez bruitées. Ces observations nous permettent de conclure que, vu notre échantillon statistique de 32 images (1024×1024) de cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales, l'estimation des exposants $\tau(q)$ ne peut être effectuée de façon fiable que pour une gamme de valeurs de q comprises dans l'intervalle $q \in [-3, 7]$.

La figure 4.14 illustre l'étude de la convergence statistique de nos calculs des spectres multifractals pour les 32 images (1024×1024) du champ de radiance des Sc marins. Contrairement aux surfaces rugueuses générées par les cascades \mathcal{W} log-normales, lorsque l'on tente d'appliquer l'équation (4.5) avec les valeurs $h(q)$ obtenues par régression linéaire des données de $h(q, a)$ en fonction de $\log_2 a$ dans la figure 4.7a, le comportement commun à q fixé n'est obtenu que pour les petites échelles. Cette observation était prévisible puisque, à cause du changement de régime observé dans $h(q, a)$, la procédure de régression linéaire a été effectuée sur une gamme d'échelles qui exclut les grandes échelles. Il est donc tout à fait normal que les pdfs du module à ces échelles ne vérifient pas l'équation (4.5) lorsque l'on utilise pour $h(q)$, l'estimation effectuée dans le régime « petite échelle » où les propriétés

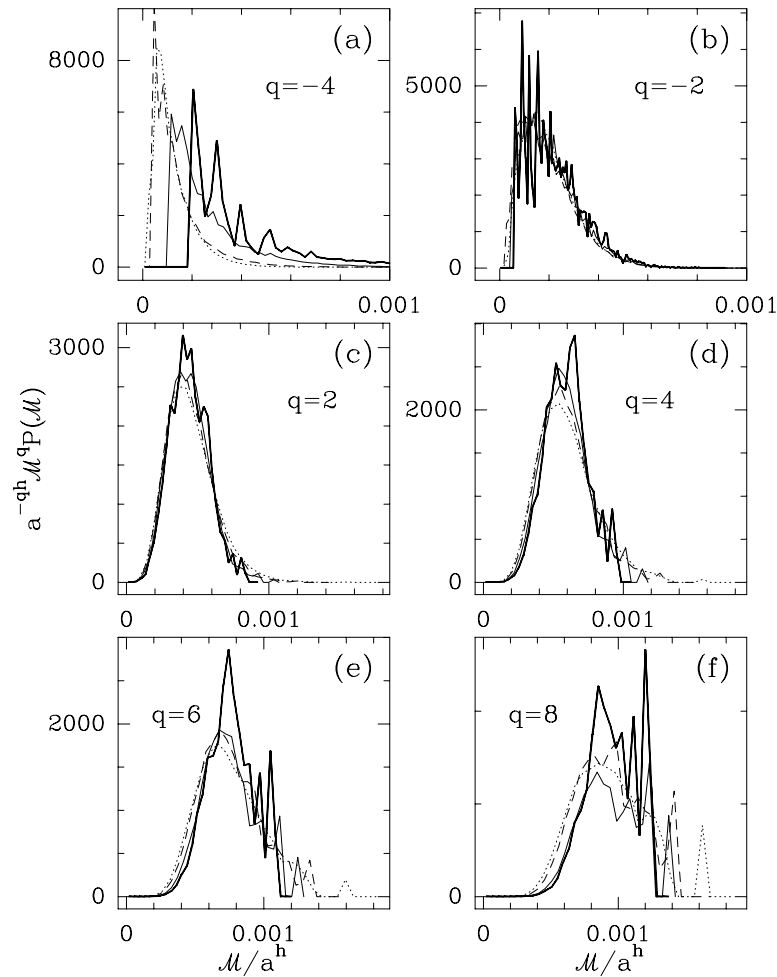


Fig. 4.13 – Pdfs du module \mathcal{M}_ψ des MMMTO de 32 images (1024×1024) de surfaces rugueuses multifractales générées avec le modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales (voir section 3.2.2, page 118) pour le jeu de paramètres $m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.03 \ln 2$. $a^{-qh(q)} \mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M})$ en fonction de $\mathcal{M}/a^{h(q)}$ pour $q = -4$ (a), -2 (b) 2 (c), 4 (d), 6 (e) et 8 (f). Les différentes courbes correspondent aux échelles suivantes : $a = \sigma_W$ (.....), $2\sigma_W$ (- - -), $2^2\sigma_W$ (—) et $2^3\sigma_W$ (—). L'ondelette analysatrice est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$.

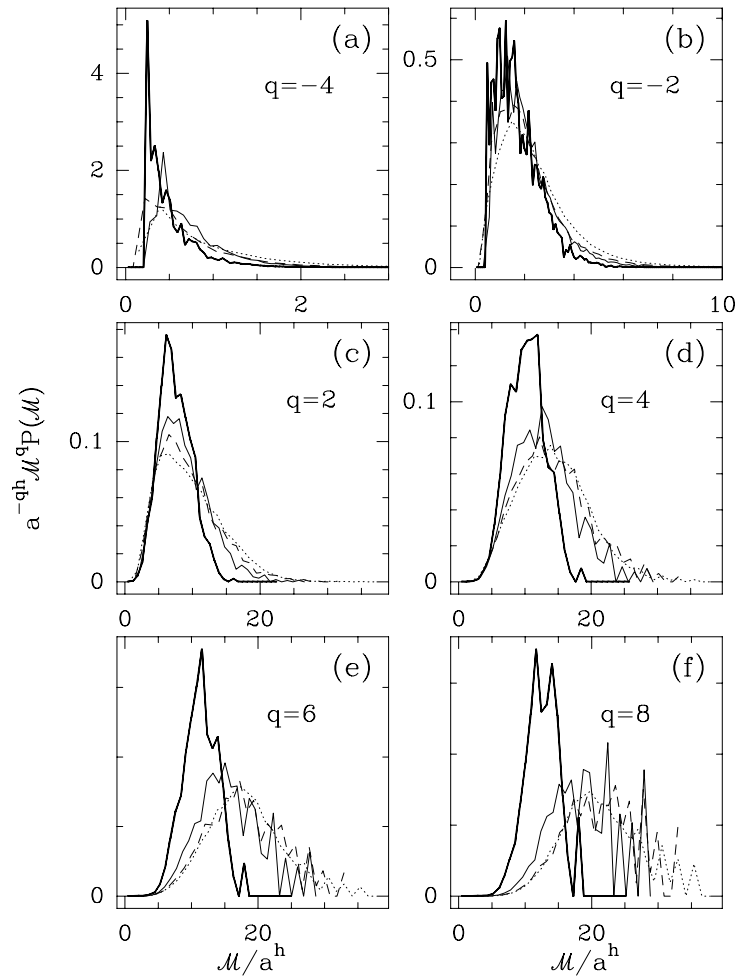


Fig. 4.14 – Pdfs du module \mathcal{M}_ψ des MMTTO des 32 images (1024×1024) du champ de radiance. $a^{-qh(q)} \mathcal{M}^q P_a(\mathcal{M})$ en fonction de $\mathcal{M}/a^{h(q)}$ pour $q = -4$ (a), -2 (b) 2 (c), 4 (d), 6 (e) et 8 (f). Les différentes courbes correspondent aux échelles suivantes : $a = \sigma_W = 390$ m (.....), $2\sigma_W = 780$ m (- - -), $2^2\sigma_W = 1560$ m (—) et $2^3\sigma_W = 3120$ m (—). L'ondelette analysatrice est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$.

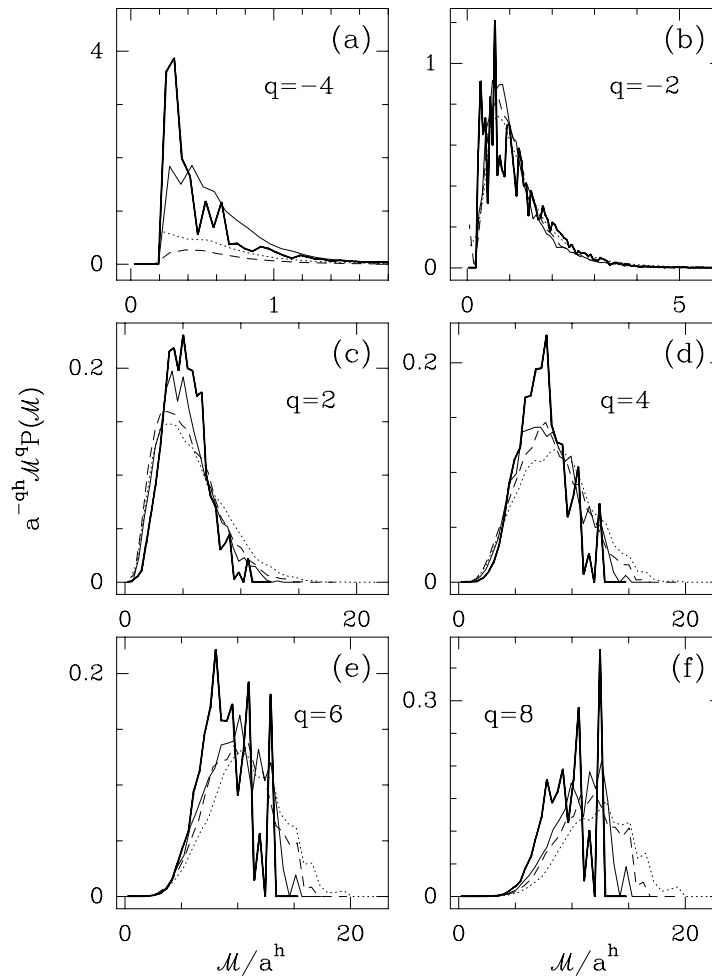


Fig. 4.15 – Pdfs du module \mathcal{M}_ψ des MMMTO des 32 images (1024×1024) du champ de radiance. L'ondelette analysatrice est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 3$. Même représentation que dans la figure 4.14.

multifractales du champ de radiance semblent être le moins affectées par la présence des structures localisées et des rouleaux de convection. On constate, de plus, que l'écart à ce comportement commun est d'autant plus important que l'on augmente q : les distributions obtenues aux grandes échelles sont progressivement décalées vers la gauche. Cela indique que pour ces échelles, l'exposant $h(q)$ mesuré est trop fort ($h > 0$), confirmant ainsi la décroissance de $h(q, a)$ observée à grande échelle ($h < 0$) dans la figure 4.7a. En ce qui concerne la convergence statistique, les données présentées dans la figure 4.14 commencent à devenir excessivement bruitées lorsque $q \gtrsim 7$ et $q \lesssim -4$, ce qui est une indication sérieuse que notre estimation de l'exposant $\tau(q)$ devient de plus en plus douteuse hors de l'intervalle $q \in [-4, 7]$. La figure 4.15 illustre les résultats de l'étude de la validité de l'équation (4.5) pour les MMMTO du squelette de la transformée en ondelettes des images Landsat du champ de radiance calculé avec une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 3$. On constate

qu'en appliquant les valeurs de $h(q)$ mesurées sur la figure 4.7a, l'équation (4.5) est valable jusqu'à des échelles bien plus grandes que dans le cas précédent. Cela rejoint la remarque de la section précédente sur le décalage en échelles des résultats entre ces deux ondelettes. Cela confirme aussi les résultats concernant la densité $P_a(\mathcal{A})$ rapportés dans la figure 4.9, où l'anisotropie introduite par les rouleaux de convection s'estompe lorsque l'on passe de l'ondelette d'ordre $n_\psi = 1$ à celle d'ordre $n_\psi = 3$. Contrairement à la figure 4.14a, les données pour $q = -4$ dans la figure 4.15a non seulement ne se superposent pas, mais de plus elles présentent un comportement incertain, signe que l'estimation de l'exposant $\tau(q)$ pour $q \lesssim -3$ devient hasardeuse. En ce qui concerne les valeurs positives de q , on constate que les intégrales des distributions de la figure 4.15 sont relativement bien définies jusqu'à $q = 8$ pour les échelles concernées. Ainsi, en terme de convergence statistique, nous pouvons prêter crédit à l'estimation des exposants $\tau(q)$ pour la gamme de valeurs de $q \in [-3, 8]$.

4.3.3 Structures localisées présentes dans les images Landsat

Comme cela a déjà été constaté en turbulence pleinement développée [33, 38, 46, 48, 49, 99, 136, 218], l'invariance d'échelle statistique peut être perturbée par la présence de structures localisées isolées. Une analyse en ondelettes continue de signaux de vitesse turbulente enregistrés à la soufflerie de Modane [136], a permis de conjecturer la présence de filaments de vorticité dans les flots turbulents à partir de la mise en évidence de singularités isolées d'exposants de Hölder négatif. Cette conjecture a été récemment confirmée par l'observation visuelle de ces filaments dans une expérience de laboratoire en système fermé [295–297]. La mesure simultanée de la pression révèle que ces zones étroites de dépression intense constituent des structures multi-échelles qui, depuis l'échelle intégrale jusqu'à l'échelle du cœur du filament, se comporte comme un pic de Dirac, c'est-à-dire une singularité forte d'exposant de Hölder négatif [296–301]. Dans la Réf. [99], la transformée en ondelettes continue a été utilisée avec succès pour détecter ces filaments dans les signaux de pression en examinant systématiquement le comportement des MMTO le long des lignes de maxima. En effet, la présence d'une singularité locale forte ($h < 0$) entraîne une croissance importante du module de la transformée en ondelettes le long de certaines lignes de maxima lorsque l'on parcourt ces lignes depuis les grandes échelles vers les petites. On peut donc facilement distinguer ces lignes de celles associées aux fluctuations du signal pour lesquelles la décroissance est dictée par l'existence d'exposants de Hölder $h > 0$ [33, 38, 46, 48, 49, 99, 136, 218]. Dans cette sous-section, nous nous proposons d'appliquer cette approche afin d'identifier la présence éventuelle de structures localisées dans les images du champ de radiance des Sc marins. Les résultats que nous allons décrire ici sont préliminaires et n'ont pas l'ambition de résoudre de façon définitive le problème de la séparation du squelette de la transformée en ondelettes en deux sous-squelettes, l'un constitué des lignes de maxima associées aux structures localisées et l'autre constitué des lignes de maxima correspondant aux fluctuations multifractales du champ de radiance, comme cela a été effectué dans la Réf. [99] pour les signaux de pression turbulente. Un tel objectif est suffisamment ambitieux pour que l'on y consacre une étude spécifique lors d'un prochain travail de thèse.

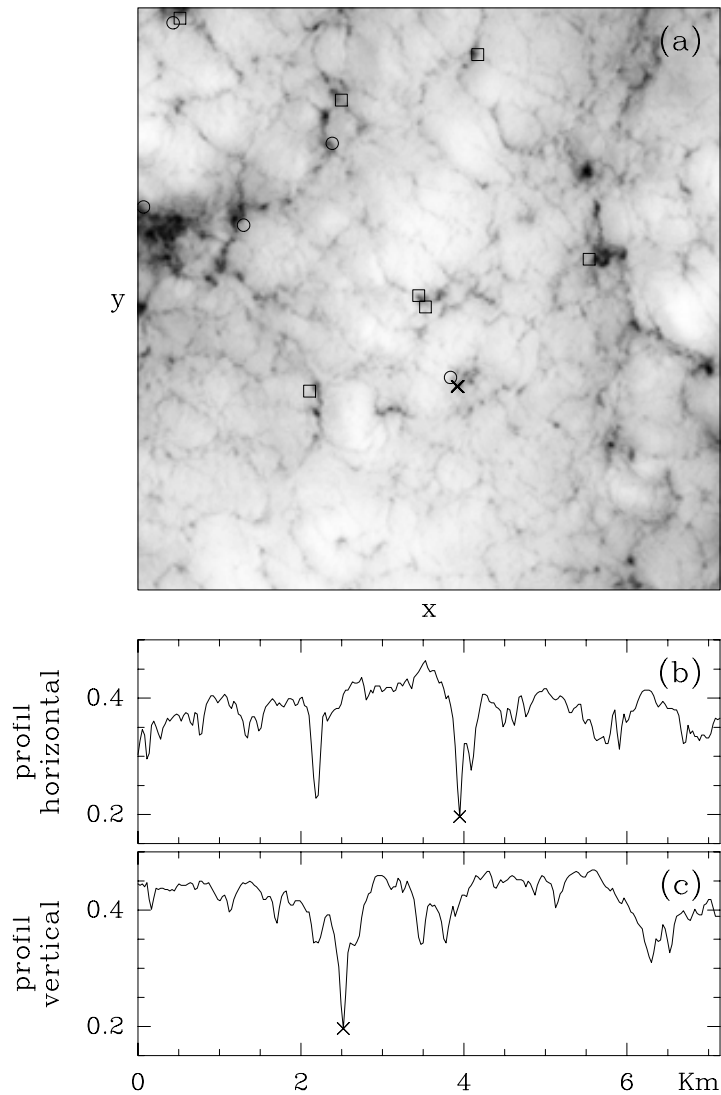


Fig. 4.16 – Portion de taille (256×256) de l'image originale du champ radiance des nuages Sc marins de la figure 4.1. Les symboles indiquent les positions où pointent les lignes de maxima « anormales » ($h < 0$) associées à une structure localisée (voir texte). L'ondelette analysatrice utilisée est une ondelette isotrope $n_\psi = 1$ (○) ou $n_\psi = 3$ (□). (b) et (c) représentent les profils obtenus le long de coupes horizontale et verticale passant par le point (×) dans (a).

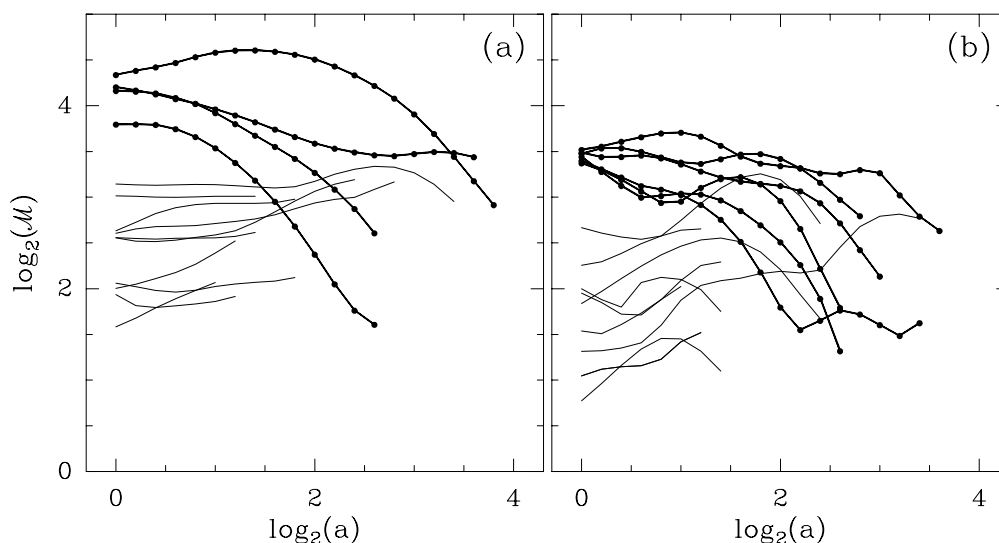


Fig. 4.17 – Évolution du module le long de quelques lignes de maxima du squelette de la transformée en ondelette de l'image de la figure 4.16a. (a) Ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. (b) Ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 3$. Les lignes qui pointent vers les structures localisées indiquées par les symboles (\circ) (respectivement (\square)) dans la figure 4.16a sont représentées par les traits ($\bullet\text{---}\bullet$) dans (a) (respectivement dans (b)). Les traits pleins correspondent à des lignes maxima dont la pente obtenue par régression linéaire du comportement de \mathcal{M}_ψ dans les échelles est positive.

Dans la figure 4.16a, nous avons représenté un morceau (256×256) de l'image originale du champ de radiance des nuages Sc marins illustrée dans la figure 4.1. Intéressons nous aux lignes de maxima appartenant au squelette de la transformée en ondelettes de cette zone, calculée avec une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. Parmi celles ci, certaines correspondent effectivement à un comportement « anormal » de \mathcal{M}_ψ dans les échelles, dans la mesure où \mathcal{M}_ψ croît au lieu de décroître lorsque l'on descend dans les échelles. Afin de repérer les structures de l'image auxquelles sont associées ces lignes de maxima particulières, nous avons identifié les racines de ces lignes par les symboles (\circ) dans la figure 4.16a. Nous avons répété cette démarche sur le squelette obtenu avec une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 3$ (\square). On constate que ces lignes de maxima pointent à proximité de structures localisées comme peuvent en témoigner les profils qui sont illustrés dans les figures 4.16b et 4.16c et qui ont été obtenus le long des coupes horizontale et verticale passant par le point (\times). On remarque sur ces profils que le point en question (\times) correspond à une structure très localisée associée à une chute brutale et importante de la radiance, qui n'est pas sans rappeler les pics « renversés » observés dans les signaux LWC des programmes FIRE et ASTEX [272,273]. L'interprétation de Davis *et al* [272] suggère que ces structures sont des sortes de « conduits » ou « d'entonnoirs » qui canalisent, à travers le nuage, l'air sec qui se trouve au-dessus de celui-ci. Dans la figure 4.17, nous avons représenté l'évolution du module des MMMTO le long de quelques lignes de maxima appartenant au

squelette concerné. Les lignes « anormales » sont indiquées par les traits $(\bullet\text{---}\bullet)$. On constate que le long de ces lignes, \mathcal{M}_ψ se comporte non seulement anormalement dans les échelles, mais qu'il prend aussi des valeurs anormalement grandes, ce qui confirme que ces lignes prennent de plus en plus d'importance dans le calcul de $\mathcal{Z}(q, a)$ (équation (2.59), page 70) à grande échelle lorsque q augmente. Cette observation apporte donc une explication au changement de comportement dans les échelles de $\mathcal{Z}(q, a)$ (Fig. 4.6) et $h(q, a)$ (Fig. 4.7) observé dans la section 4.3.2. Ceci confirme qu'avec les résultats actuels, la procédure de régression linéaire utilisée pour estimer les spectres multifractals $\tau(q)$ et $D(h)$ doit impérativement être effectuée à petite échelle, où vu le taux de prolifération ($\sim a^{-2}$) des lignes de maxima « normales », la contribution de ces dernières domine celle des lignes de maxima « anormales » dans le calcul des fonctions de partition. Toutefois, il ne fait aucun doute que seule une étude systématique et exhaustive des lignes de maxima associées aux structures localisées permettra d'éliminer le biais introduit par ces structures dans l'étude des propriétés multifractales des fluctuations du champ de radiance des nuages Sc marins.

4.4 Calcul du noyau d'autosimilarité des images Landsat du champ de radiance

Nous avons vu, dans la section 4.3.2, que la densité de probabilité $P_a(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ du vecteur gradient associé aux MMMTO appartenant aux squelettes des transformées en ondelettes des images Landsat de la radiance factorise suivant l'équation (4.4). Ainsi, les caractéristiques multifractales des surfaces rugueuses correspondantes sont contenues dans l'évolution de la forme de $P_a(\mathcal{M})$ en fonction de l'échelle. Cette évolution a été le sujet de l'étude rapportée dans la section 4.3.2. À partir de ces résultats, nous nous proposons dans cette section d'utiliser la méthode du noyau d'autosimilarité présentée dans la section 3.4.1 (page 143), pour identifier le processus multiplicatif sous-jacent aux fluctuations de radiance des nuages Sc marins.

Dans les figures 4.18a et 4.18c, nous avons représenté la transformée de Fourier $\hat{G}_{aa'}$ du noyau d'autosimilarité calculée sur 32 images (1024×1024) du champ de radiance des Sc marins avec une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. Dans les figures 4.18b et 4.18d, nous avons réussi à superposer le module $|\hat{G}_{aa'}|$ et l'argument $\Phi_{aa'}$ des noyaux calculés pour plusieurs couples d'échelles $a < a'$, sur un noyau unique $\hat{G}(p) = \hat{G}_{aa'}^{1/s(a, a')}(p)$ avec $s(a, a') = \ln(a'/a)$, confirmant par là, la pertinence du modèle de cascade continûment autosimilaire invariante d'échelle (Éqs (3.43) et (3.44), page 144). Remarquons de plus que les résultats expérimentaux sont en remarquable accord avec la forme théorique du noyau log-normal (Éq. (3.55), page 147), c'est-à-dire une parabole pour $\hat{G}_{aa'}$ et une droite pour $\Phi_{aa'}$ qui sont représentées en trait plein dans les figures 4.18b et 4.18d. Il est important de noter que cet accord commence à se détériorer pour des valeurs de $|p| \gtrsim 4$, ce qui est simplement le signe d'un manque de statistique inhérent à la taille globale de l'image (Fig. 4.1) que nous avons analysée.

Dans la section 3.4.2 (page 145), nous avons vu qu'une façon de déterminer précisément

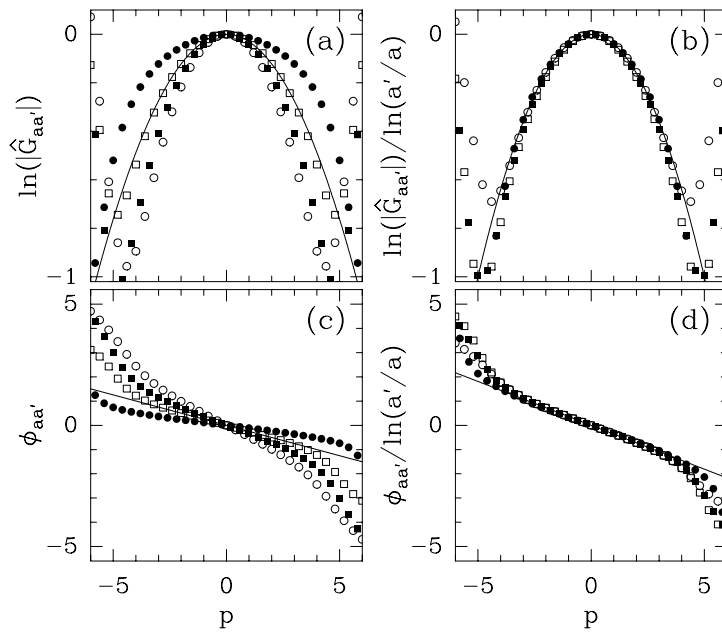


Fig. 4.18 – Calcul du noyau $\hat{G}_{aa'}(p)$ pour 32 images (1024×1024) du champ de radiance. ψ est l'ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. (a) $\ln |\hat{G}_{aa'}(p)|$ en fonction p ; (b) $\ln |\hat{G}_{aa'}(p)| / \ln(a'/a)$ en fonction p ; (c) $\Phi_{aa'}(p)$ en fonction p ; (d) $\Phi_{aa'}(p) / \ln(a'/a)$ en fonction p . Les symboles correspondent aux paires d'échelles suivantes : $a = 2^{0.5}\sigma_W = 551$ m, $a' = 2^{2.5}\sigma_W = 2204$ m (\circ) ; $a = 2\sigma_W = 780$ m, $a' = 2^{2.5}\sigma_W = 2204$ m (\blacksquare) ; $a = 2\sigma_W = 780$ m, $a' = 2^2\sigma_W = 1560$ m (\square) ; $a = 2^{1.5}\sigma_W = 1102$ m, $a' = 2^2\sigma_W = 1560$ m (\bullet). Dans (b) et (d), les traits pleins correspondent aux prédictions théoriques du noyau log-normal, $\hat{G}(p) = \exp[(imp - \sigma^2 p^2/2)/\ln 2]$, pour les paramètres $m = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = 0.08 \ln 2$.

le noyau d'autosimilarité consiste à calculer ses cumulants définis par l'équation (3.49) (page 145). Ces cumulants sont obtenus par régression linéaire du comportement des quantités $C_n(a, a')$, définies par les équations (3.57) et (3.58) (page 148), en fonction de $\ln(a'/a)$. Dans la figure 4.19, nous avons représenté les résultats du calcul de ces quantités pour plusieurs paires d'échelles. Les données obtenues pour $C_1(a, a')$ et $C_2(a, a')$ se positionnent remarquablement sur une droite. Cette observation est une confirmation de l'invariance d'échelle définie par les relations (3.43) et (3.44) (page 144). L'estimation de la pente des droites obtenues pour C_1 et C_2 conduit aux valeurs suivantes des cumulants $c_1 = -0.38 \pm 0.01$ et $c_2 = 0.08 \pm 0.01$. Ces estimations sont en très bon accord avec les valeurs des paramètres $m = c_1 \ln 2 = -0.38 \ln 2$ et $\sigma^2 = c_2 \ln 2 = 0.07 \ln 2$, utilisés dans la figure 4.6 pour reproduire les données expérimentales à l'aide de la forme parabolique du spectre théorique $\tau(q)$ (Éq. (3.29), page 122) des cascades \mathcal{W} log-normales. Par contre, dans la figure 4.19c, les données pour $C_3(a, a')$ ne présentent pas un comportement linéaire aussi spectaculaire. Comme nous l'avons évoqué dans la section 3.4.2 (page 145), pour un échantillon statistique de 32 images (1024×1024), l'estimation de $C_3(a, a')$ manque

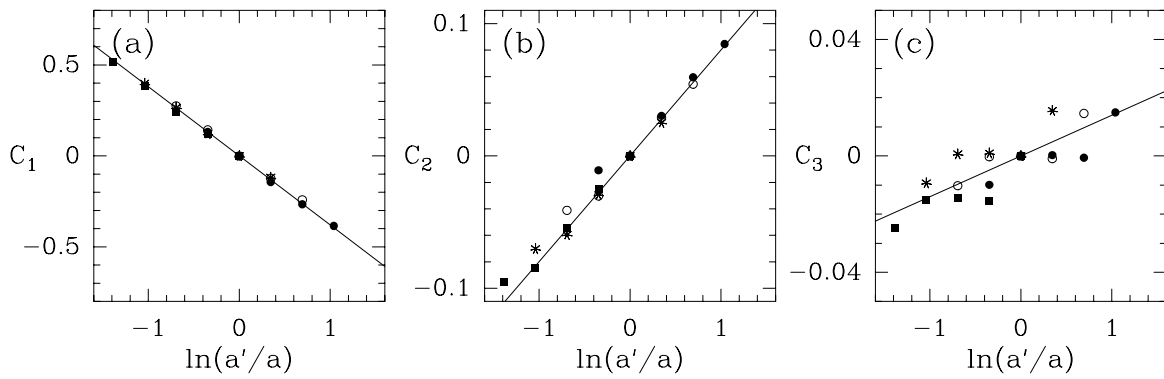


Fig. 4.19 – Calcul des cumulants du noyau d’autosimilarité \hat{G} des images Landsat du champ de radiance. L’ondelette analysatrice est une ondelette isotrope d’ordre $n_\psi = 1$. (a) $C_1(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$; (b) $C_2(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$; (c) $C_3(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$. Les symboles correspondent aux échelles de référence suivantes : $a' = 2^{0.5}\sigma_W = 551$ m (\bullet), $2\sigma_W = 780$ m (\circ), $2^{1.5}\sigma_W = 1102$ m ($*$) et $2^2\sigma_W = 1560$ m (\blacksquare). Les traits pleins correspondent aux régressions linéaires conduisant aux valeurs suivantes des cumulants : $c_1 = -0.38 \pm 0.01$ (a), $c_2 = 0.08 \pm 0.01$ (b) et $c_3 = 0.014 \pm 0.005$ (c).

cruellement de précision. Bien que très hasardeuse, une régression linéaire sur l’ensemble des points obtenus à différentes échelles conduit à la valeur suivante du cumulant d’ordre trois $c_3 = 0.014 \pm 0.005$. Mais à partir de cette estimation, peut-on réellement se permettre d’exclure le modèle de cascade log-normale – pour lequel $c_k = 0$ pour tout $k \geq 3$ – au profit de la cascade log-Poisson. Comme nous l’avons discuté dans la section précédente, lorsque l’on atteint des échelles de l’ordre de la taille caractéristique des rouleaux de convection, l’organisation macroscopique de ces rouleaux commence à affecter sérieusement les propriétés d’invariance d’échelle. C’est le cas pour l’échelle $a = 2^{2.5}\sigma_W = 2204$ m qui correspond aux points les plus à droite de chaque série de symboles dans la figure 4.19c. Il peut donc paraître judicieux de ne pas tenir compte de ces points, et une nouvelle régression linéaire nous conduit alors à une valeur du cumulant c_3 beaucoup plus proche de 0. Il est donc très délicat, vu l’échantillon statistique investi, de prétendre distinguer un modèle particulier de cascade \mathcal{W} aléatoire de son approximation log-normale à partir de la mesure du cumulants d’ordre trois. Un moyen de tester la validité du noyau ainsi calculé est de vérifier si son utilisation dans l’équation de convolution (3.41) (page 144) permet effectivement de superposer les pdfs de \mathcal{M}_ψ calculées à différentes échelles. La figure 4.20 rapporte les résultats de tentatives effectuées avec le noyau log-Poisson ainsi qu’avec son approximation log-normale. On constate que les différentes courbes $P_a(\mathcal{M})$, calculées pour différentes échelles dans la figure 4.20a, se mettent effectivement les unes sur les autres lorsque l’on applique le noyau d’autosimilarité G , et ce que le cumulants d’ordre trois soit nul (Fig. 4.20b) ou pas (Fig. 4.20c). La différence entre ces deux opérations s’observe principalement au niveau des queues des pdfs. On constate que dans le cas log-normale, ces queues se superposent parfaitement sur la courbe de l’échelle de référence $a = 2^{0.5}\sigma_W = 551$ m (\circ), sauf pour la distribution calculée à la grande échelle $a = 2^{2.5}\sigma_W = 2204$ m (—). Par contre, dans le cas

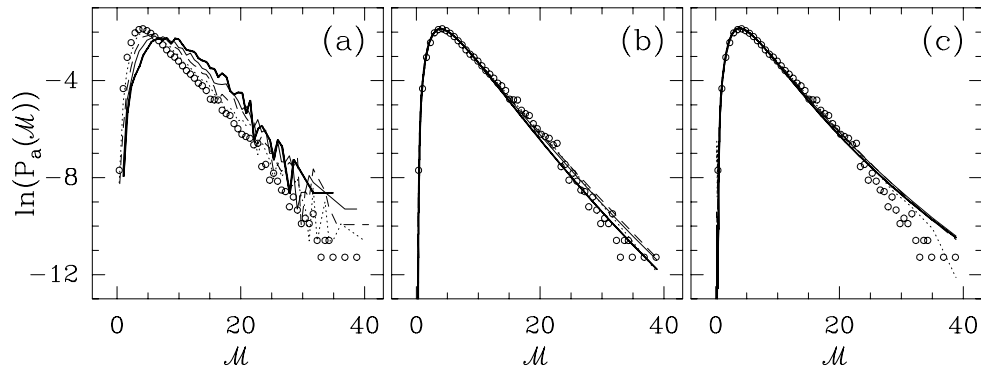


Fig. 4.20 – Pdfs de \mathcal{M}_ψ calculées aux échelles suivantes : $a = 2^{0.5}\sigma_W = 551$ m (\circ), $2\sigma_W = 780$ m (\cdots), $2^{1.5}\sigma_W = 1102$ m ($- - -$), $2^2\sigma_W = 1560$ m ($—$) et $2^{2.5}\sigma_W = 2204$ m ($—$). Mêmes paramètres de calcul que dans la figure 4.9a. (a) $\ln P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M} . (b) $\ln P_a(\mathcal{M})$ en fonction de \mathcal{M} ; mêmes données que dans (a) après application de l'équation (3.41) (page 144) avec un noyau Gaussien construit à partir des deux premiers cumulants obtenus dans les figures 4.19a et 4.19b, soit $c_1 = -0.38$ et $c_2 = 0.08$. (c) Mêmes pdfs que dans (a) mais après avoir été transformées via l'équation (3.41) (page 144) avec un noyau construit à partir des trois premiers cumulants obtenus dans la figure 4.19, soit $c_1 = -0.38$, $c_2 = 0.08$ et $c_3 = 0.014$.

log-Poisson, elles s'écartent toutes de la plus petite échelle pour se caler sur celle de la plus grande, ce qui est légèrement plus gênant quand l'on connaît l'influence des structures localisées et des rouleaux de convection à ces grandes échelles. Ces différences mineures nous incite à conclure qu'avec l'échantillon statistique dont nous disposons, il ne nous est pas possible de distinguer un modèle particulier de cascade \mathcal{W} aléatoire de son approximation log-normale invariante d'échelle.

Remarque

Remarquons que l'estimation du paramètre d'intermittence σ^2 par le noyau d'autosimilarité G , $c_2 = \sigma^2 / \ln 2 = 0.08$, est légèrement différente de celle obtenue lors du calcul du spectre des singularités $D(h)$ (Fig. 4.7), soit $\sigma^2 / \ln 2 = 0.07$. Cette différence est significative de la précision effective de notre estimation numérique : $\sigma^2 / \ln 2 = 0.075 \pm 0.010$.

Pour tester la fiabilité de notre estimation du calcul du noyau d'autosimilarité, nous avons répété l'estimation des cumulants à partir des pdfs $P_a(\mathcal{M})$ obtenues avec une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 3$ (Fig. 4.9c). Dans la figure 4.21, nous avons représenté $C_1(a, a')$, $C_2(a, a')$ et $C_3(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$, pour des couples d'échelles $(a, a') < 2^{2.5}\sigma_W = 2204$ m. On constate que ces points se positionnent en très bonne approximation sur des droites de pentes $c_1 = -0.37 \pm 0.01$ et $c_2 = 0.055 \pm 0.010$ respectivement, ce qui confirme l'invariance d'échelle de la cascade sous-jacente observée dans les figures 4.19a et 4.19b. Les valeurs de ces cumulants sont en accord avec les paramètres issus de l'estimation parabolique du spectre des singularités $D(h)$ dans la figure 4.7d. On

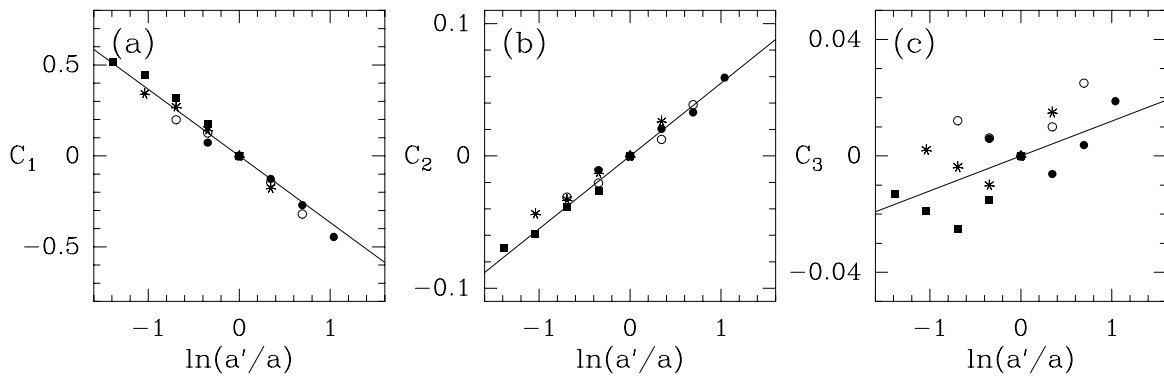


Fig. 4.21 – Calcul des cumulants du noyau d’autosimilarité \hat{G} des images Landsat du champ de radiance. L’ondelette analysatrice est une ondelette isotrope d’ordre $n_\psi = 3$. (a) $C_1(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$; (b) $C_2(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$; (c) $C_3(a, a')$ en fonction de $\ln(a'/a)$. Les symboles correspondent aux échelles de référence suivantes : $a' = \sigma_W = 390$ m (\bullet), $2^{0.5}\sigma_W = 551$ m (\circ), $2\sigma_W = 780$ m ($*$), $2^{1.5}\sigma_W = 1102$ m (\blacksquare) et $2^2\sigma_W = 1560$ m (\square). Les traits pleins correspondent aux régressions linéaires qui conduisent aux valeurs suivantes des cumulants $c_1 = -0.37 \pm 0.01$ (a), $c_2 = 0.055 \pm 0.01$ (b) et $c_3 = 0.012 \pm 0.005$ (c).

observe toutefois un léger écart dans l’estimation de σ^2 suivant l’ondelette utilisée. Cet écart, qui reste contenu dans les barres d’erreur de mesure, est caractéristique de l’incertitude expérimentale et démontre la nécessité de disposer d’un échantillon statistique plus important. De plus, la dispersion légèrement supérieure des points dans la figure 4.21, comparativement à la figure 4.19, semble suggérer que plus l’ordre de l’ondelette est grand, plus important doit être l’échantillon statistique nécessaire à l’estimation des cumulants. Cela est clair sur la figure 4.21c, où les données pour $C_3(a, a')$ sont suffisamment éparpillées pour que l’on hésite avant de reconnaître une tendance linéaire en fonction de $\ln(a'/a)$.

4.5 Fonctions de corrélation des images Landsat du champ de radiance

Comme cela a été préconisé dans les Réfs [100,111,219,236] dans le cas des signaux 1D irréguliers, la mise en évidence d’une structure hiérarchique multiplicative passe par l’étude des corrélations espace-échelles qui existent entre les points de la transformée en ondelettes. En effet, l’autosimilarité du processus sous-jacent se reflète dans la structure ultramétrique de la transformée en ondelettes que l’on peut identifier par la forme particulière des fonctions de corrélation « espace-échelles ». Dans cette section, nous nous proposons d’appliquer la démarche présentée dans la section 3.5.1 (page 152) aux images Landsat du champ de radiance. Notre but est de confirmer la pertinence des modèles de cascades \mathcal{W} log-normales pour décrire la structure interne des Sc marins. Dans la figure 4.22, nous avons représenté les fonctions de corrélation $C(\Delta x, a_1, a_2)$ moyennées sur les 32 images (1024×1024) de la

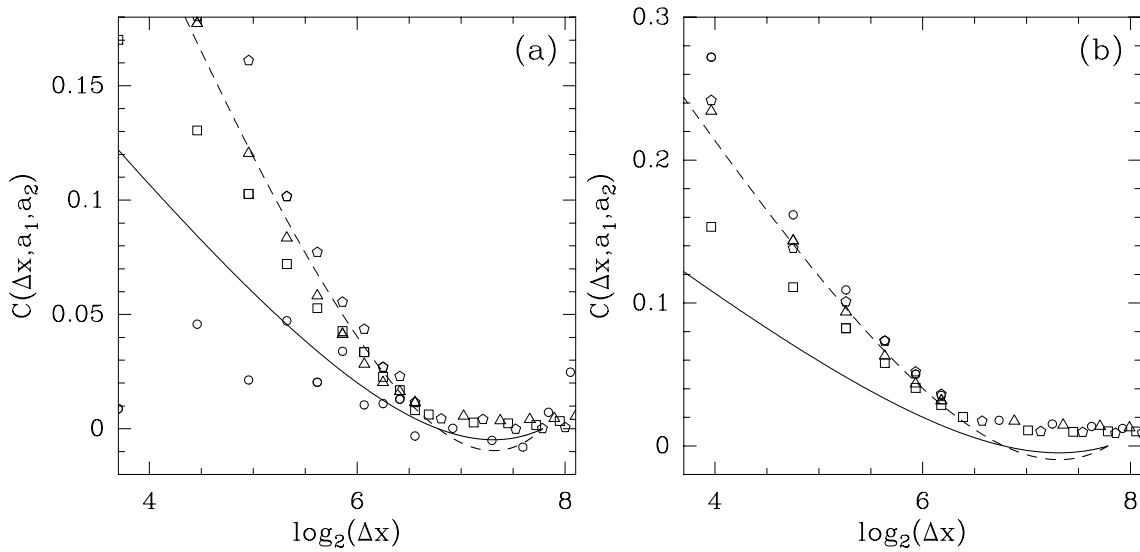


Fig. 4.22 – Fonction de corrélation $C(\Delta x, a_1, a_2)$ de la magnitude en fonction de $\log_2(\Delta x)$ calculée à partir des transformées en ondelettes de 32 images (1024×1024) du champ de radiance des nuages Sc marins. L'ondelette analysatrice utilisée est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 1$. (a) Magnitude des MMMTO: $\omega(\mathbf{x}, a) = \ln[\mathcal{M}_\psi[f](\mathcal{L}_\mathbf{x}(a))]$ (Éq. (4.6)). (b) Magnitude de la transformée en ondelettes continue : $\omega(\mathbf{x}, a) = \frac{1}{2} \ln \varepsilon^2(\mathbf{x}, a)$ (Éq. (3.68), page 152). Les symboles correspondent aux couples d'échelles suivants : $a_1 = a_2 = 2\sigma_W = 780$ m (\circ) ; $a_1 = \sigma_W = 390$ m, $a_2 = 2\sigma_W = 780$ m (\triangle) ; $a_1 = \sigma_W = 390$ m, $a_2 = 4\sigma_W = 1560$ m (\square) ; $a_1 = 2\sigma_W = 780$ m, $a_2 = \sigma_W = 1560$ m (\diamond). Les traits pleins (interrompus) correspondent aux prédictions théoriques (Éq. (3.76), page 155) pour une surface rugueuse multifractale générée par un modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires avec le jeu de paramètres $\sigma^2 = 0.08 \ln 2$ ($0.16 \ln 2$) et $L = 220$ pixels = 6.6 km.

radiance pour différents couples d'échelles. La figure 4.22b contient les données obtenues en utilisant la définition de la magnitude donnée par l'équation (3.68) (page 152), c'est-à-dire en utilisant toute l'information contenue dans la transformée en ondelettes continue. Les données de la figure 4.22a sont, par contre, calculées à partir des MMMTO appartenant au squelette de la transformée en ondelettes, c'est-à-dire avec la définition suivante de la magnitude :

$$\omega(\mathbf{x}, a) = \ln\left(\mathcal{M}_\psi[f](\mathcal{L}_\mathbf{x}(a))\right), \quad (4.6)$$

où $\mathcal{L}_\mathbf{x}(a)$ est une ligne de maxima qui converge vers la position \mathbf{x} , dans la limite $a \rightarrow 0^+$. Quelle que soit la définition de la magnitude, lorsque l'on représente les résultats du calcul de $C(\Delta x, a_1, a_2)$ en fonction de $\log_2(\Delta x)$, on obtient une remarquable consistance dans la mesure où pour $\Delta x > \sup(a_1, a_2)$, tous les points se positionnent sur une même courbe monotone et décroissante. Cette courbe s'annule au delà de $\Delta x \gtrsim 2^7$ pixels $\simeq 3.8$ km, indiquant la décorrélation des coefficients en ondelettes. Ces résultats confirment donc qu'à

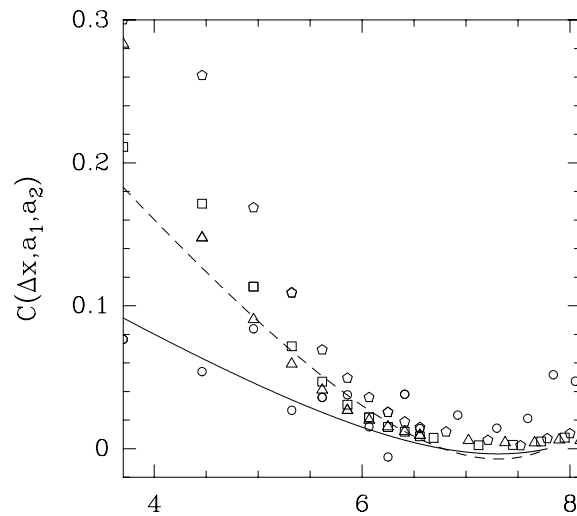


Fig. 4.23 – Fonction de corrélation $C(\Delta x, a_1, a_2)$ de la magnitude en fonction de $\log_2(\Delta x)$ calculée à partir des transformées en ondelettes de 32 images (1024×1024) du champ de radiance. L'ondelette analysatrice utilisée est une ondelette isotrope d'ordre $n_\psi = 3$. Magnitude des MMMTO: $\omega(\mathbf{x}, a) = \ln[\mathcal{M}_\psi[f](\mathcal{L}_\mathbf{x}(a))]$ (Éq. (4.6)). Les symboles ont la même signification que dans la figure 4.22. Les traits pleins (interrompus) correspondent aux prédictions théoriques (Éq. (3.76), page 155) pour une surface rugueuse multifractale générée par un modèle de cascades \mathcal{W} aléatoire avec le jeu de paramètres $\sigma^2 = 0.06 \ln 2$ ($0.12 \ln 2$) et $L = 220$ pixels = 6.6 km.

des distances supérieures ou de l'ordre de la taille caractéristique des rouleaux de convection $\lambda \simeq 5-6$ km, les fluctuations du champ de radiance ne sont pas corrélées. La structure interne des nuages Sc marins présente donc des propriétés d'invariance d'échelle sur une gamme d'échelles qui n'excède pas la taille caractéristique des structures convectives. Le fait que les fonctions de corrélation calculées à partir des MMMTO (fig. 4.22a) présentent le même comportement que celles calculées avec la transformation en ondelettes continue (Fig. 4.22b) (moyennant quelques fluctuations dues à une statistique plus faible), nous renforce dans notre conviction que la structure arborescente du squelette de la transformée en ondelettes contient toute l'information sur le processus multiplicatif de cascade sous-jacent aux fluctuations du champ de radiance des Sc marins. Afin de tenter de caractériser un peu plus précisément la nature de cette cascade, nous montrons dans les figures 4.22a et 4.22b, la courbe théorique (équation (3.76), page 155) correspondant à la fonction de corrélation d'une cascade \mathcal{W} aléatoire pour le jeu de paramètres $\sigma^2 = 0.16 \ln 2$ et $L = 220$ pixels = 6.6 km (- - -) qui permet d'approcher de façon remarquable les données des Sc marins. On constate que la valeur de l'échelle intégrale L dans l'équation (3.76) (page 155) est en accord avec les observations précédentes : elle est de l'ordre de la taille caractéristique des rouleaux de convection. Par contre, la valeur de σ^2 est deux fois plus grande que celle mesurée avec la méthode MMTO 2D et le calcul du noyau d'autosimilarité dans les sections précédentes. Précisons que cette apparente surestimation du paramètre d'intermittence a

déjà été observée lors de l'étude des fonctions de corrélation de champs de vitesse 1D en turbulence pleinement développée [100, 236]. Elle signifie simplement que le modèle de cascade \mathcal{W} aléatoire décrit dans la section 3.2.2 (page 118) est un modèle très attractif qui demeure quelque peu idéaliste dans la mesure où il est fort probable que la structure espace-échelles de l'arbre quaternaire soit beaucoup trop simpliste. On peut par exemple imaginer l'existence de corrélations entre les branches à chaque branchement, la présence d'effets de mémoire à l'intérieur d'une même branche ; la structure quaternaire de l'arbre peut aussi être remise en cause. Afin de tester la robustesse de nos résultats, nous avons répété le calcul des fonctions de corrélation espace-échelles avec une ondelette d'ordre $n_\psi = 3$. Les résultats obtenus sont rapportés dans la figure 4.23. Ils sont en excellent accord avec les résultats précédents et confirment donc la structure ultramétrique responsable de l'intermittence structurelle des Sc marins.

4.6 Discussion

Dans ce chapitre nous avons appliqué de la méthode MMTO 2D présentée et testée dans les chapitres précédents, à des données satellites en provenance de la NASA. Ce chapitre a montré sur un cas expérimental la richesse de l'information structurelle contenue dans par le partitionnement espace-échelles que fournit le squelette de la transformée en ondelettes. Cette première analyse en ondelettes 2D s'est portée sur des images Landsat du champ de radiance de nuages Sc marins enregistrées au cours du programme FIRE. L'estimation des spectres $\tau(q)$ et $D(h)$ de ces images a permis de quantifier les propriétés multifractales des champs de radiance et d'épaisseur optique. Malgré la présence de structures localisées isolées, nous avons réussi à mettre en évidence l'existence d'une symétrie structurale, à savoir l'invariance d'échelle statistique des fluctuations de ces champs, en jouant sur le grossissement de notre « microscope mathématique » depuis une échelle macroscopique (qualifiée d'échelle intégrale) $L \simeq 5\text{-}6$ km, de l'ordre de la taille caractéristique des rouleaux de convection, jusqu'à la résolution maximale de notre microscope ($\sigma_W = 13$ pixels = 390 m). Le calcul du noyau d'autosimilarité et l'estimation des fonctions de corrélation « espace-échelles » ont permis de révéler la présence d'une organisation ultramétrique espace-échelles qui est la manifestation d'une organisation structurelle multiplicative autosimilaire et invariante d'échelle, dont la statistique est probablement log-normale [129]. Ces observations suggèrent que le modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires log-normales sur des bases d'ondelettes orthonormales séparables, proposé dans le chapitre 3 pour synthétiser des surfaces rugueuses multifractales, est un modèle tout à fait raisonnable pour rendre compte des fluctuations de rugosité du champ de radiance caractérisant la structure interne des nuages Sc marins.

Il est important de signaler que l'application de la MMTO 1D à des signaux de vitesse turbulents enregistrés dans des conditions expérimentales de turbulence pleinement développée (à haut Reynolds), a déjà conduit à des résultats tout à fait similaires à ceux exposés dans ce chapitre [96, 97, 100, 235, 236]. En effet, les fluctuations du champ de vitesse turbulente présente des propriétés multifractales semblables à celles des processus de cascades

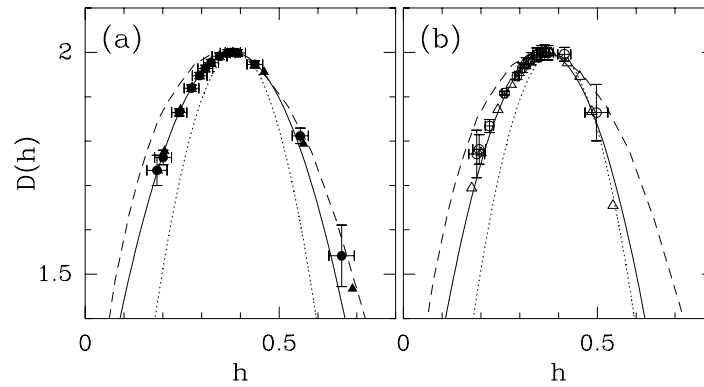


Fig. 4.24 – Spectre des singularités $D(h)$ des images Landsat du champ de radiance, calculé avec une ondelette analysatrice isotrope d'ordre $n_\psi = 1$ (a) ou d'ordre $n_\psi = 3$ (b). Mêmes calculs que dans les figures 4.7c et 4.7d respectivement. Les traits pleins correspondent aux prédictions théoriques des spectres multifractals pour une cascade \mathcal{W} log-normale de paramètres ($m = -0.38 \ln 2$, $\sigma^2 = 0.07 \ln 2$) et ($m = -0.366 \ln 2$, $\sigma^2 = 0.06 \ln 2$) respectivement. Les spectres des singularités $D(h)$ des fluctuations de la vitesse (.....) et de la température (- - -) en turbulence pleinement développée sont représentés à titre comparatif.

log-normales, l'invariance d'échelle de ce champ étant atteinte asymptotiquement à la limite des grands nombres de Reynolds [100, 235]. Au delà de la description multifractale de l'intermittence des fluctuations des champs de radiance (2D) et de vitesse (1D), le parallèle se poursuit par la constatation de la présence de structures localisées isolées, dont l'origine a été clairement identifiée dans les flots turbulents comme résultant de la formation de filaments de vorticité [33, 38, 99, 136, 218]. Dans la figure 4.24, nous avons représenté le spectre des singularités $D(h)$ du champ de radiance (Fig. 4.7) afin de le comparer au spectre $D(h)$ obtenu lors de l'analyse 1D des signaux de vitesse longitudinale mesurés dans la soufflerie de Modane ($R_\lambda \simeq 2000$) [97, 100]. En réalité, pour les signaux de vitesse, nous avons représenté $D(h) + 1$ afin de pouvoir comparer les données 1D aux données 2D. On constate que ces spectres sont clairement différents. Il n'empêche que l'exposant de Hölder le plus présent dans le champ de radiance, $h = m / \ln 2 = h(q = 0) = \partial\tau / \partial q|_{q=0} = 0.38 \pm 0.01$, se confond avec celui du champ de vitesse, $h = h(q = 0) = 0.39 \pm 0.01$. Notons que ces deux exposants s'écartent nettement de la valeur $h = 1/3$ du comportement en $k^{-5/3}$ du spectre de puissance prédit par Kolmogorov en 1941 [190]. En fait, ces deux spectres des singularités se distinguent nettement par la valeur du paramètre d'intermittence qui est bien plus important pour le nuage, $\sigma^2 / \ln 2 = 0.08 \pm 0.01$ ($n_\psi = 1$) ou $\sigma^2 / \ln 2 = 0.06 \pm 0.01$ ($n_\psi = 3$), que pour la vitesse turbulente, $\sigma^2 / \ln 2 = 0.036 \pm 0.004$. Ainsi, le champ de radiance est plus intermittent que le champ de vitesse turbulente, la largeur du spectre des singularités $D(h)$ étant plus importante pour le premier que pour le second. Dans la figure 4.24, nous avons aussi représenté pour comparaison le spectre des singularités des fluctuations de température mesuré dans un écoulement turbulent pour $R_\lambda = 400$ [302]. On constate que ce spectre, qui correspond aux fluctuations d'un scalaire passif, est beaucoup

plus large que celui de la vitesse, prouve que le champ de température est plus intermittent que le champ de vitesse. Le point que nous voulons mettre en avant est le fait que le spectre des singularités de la température est nettement plus proche de celui mesuré pour les Sc marins. L'intermittence des champs de radiance et de l'épaisseur optique étant directement reliée à celle de la structure interne du nuage, on peut donc raisonnablement s'interroger sur la véritable signification de cette similitude. Il est bien admis que la composition en eau liquide des nuages dépend fortement des conditions thermodynamiques et hydrodynamiques locales et donc ne peut pas être considérée comme un scalaire passif. Toutefois, ce que suggèrent les résultats de notre étude multifractale avec la méthode MMT0 2D, est le fait que statistiquement, les fluctuations du champ de radiance sont assez proches des fluctuations d'un champ scalaire passif en turbulence pleinement développée. Il apparaît donc indispensable d'effectuer des études supplémentaires sur de nouvelles images Landsat de Sc marins, afin d'évaluer à quel point les résultats et conclusions présentés dans ce chapitre ont un caractère de généralité.

Pour terminer, nous aimerions mettre l'accent sur l'aspect modélisation de la structure des nuages. L'étude du squelette de la transformée en ondelettes des images Landsat, nous a permis de révéler la pertinence du modèle des cascades \mathcal{W} aléatoires invariantes d'échelles pour décrire la structure hiérarchique des Sc marins, comparativement aux modèles multifractals proposés précédemment tels que les modèles de cascades singulières intégrées fractionnairement [130, 133, 220, 221, 223] ou de cascades bornées [211, 288]. De plus, parmi les différents types de cascades \mathcal{W} aléatoires, notre étude démontre qu'avec l'échantillon statistique à notre disposition, rien ne permet de remettre en cause l'approximation log-normale. Nous sommes persuadés que l'utilisation des cascades \mathcal{W} aléatoires pour modéliser la structure interne intermittente des nuages, va ouvrir de nouvelles perspectives dans le domaine de la modélisation (et donc de la prédiction) du climat et permettre une meilleure compréhension de l'interaction entre les nuages et le rayonnement solaire.

Chapitre 5

Conclusion

La caractérisation de surfaces rugueuses est une problématique que l'on retrouve dans des domaines très variés des sciences aussi bien fondamentales qu'appliquées [2, 3, 5–21]. Dans cette optique, ce mémoire de thèse propose une approche originale pour l'analyse d'images de telles surfaces basée sur de nouveaux concepts, des outils efficaces issus de l'analyse en ondelettes et une méthodologie statistique inspirée de la thermodynamique.

Dans la littérature, le concept le plus utilisé pour caractériser la rugosité est l'exposant de Hurst [2, 3, 6, 9] qui est une quantité qui décrit globalement l'irrégularité de la surface étudiée. Il existe de nombreuses techniques qui permettent d'estimer cet exposant [76–79, 82–85]. Cependant, la mesure de cet exposant souffre d'une insuffisance fondamentale : elle présuppose que la surface ne présente pas de fluctuations de rugosité. Nous avons donc fait appel à de nouveaux concepts permettant, d'une part de quantifier la rugosité locale de la surface (exposant de Hölder h) et d'autre part de caractériser les fluctuations de cette rugosité (spectre des singularités $D(h)$). Nous avons donc généralisé à 2D cette approche qui est déjà très largement employée à 1D et qui se base sur la caractérisation statistique des propriétés d'invariance d'échelle du signal analysé [46–50]. Pour mener à bien cette tâche, une adaptation de ces concepts a été nécessaire afin de prendre en compte la présence d'anisotropie dans les propriétés d'invariance d'échelle. Nous avons ensuite introduit des outils permettant de mesurer ces nouvelles grandeurs. Le choix s'est tout naturellement porté sur la transformation en ondelettes continue [22–38]. En effet, de par sa capacité à explorer la structure interne d'un objet en fonction de l'échelle d'obser-

vation, cet outil est parfaitement adapté à caractériser les propriétés d'invariance d'échelle de celui-ci. La transformation en ondelettes qui a servi de base à notre travail est celle proposée par Mallat et ses collaborateurs [90, 91] ; elle est directement inspirée des techniques de détection de contours (Canny [119]). La première étape a consisté à présenter le squelette de la transformation en ondelettes 2D qui constitue un véritable partitionnement espace-échelle. Nous avons ensuite vérifié, sur des cas d'école de singularités isolées, que ce squelette contient bien toute l'information nécessaire pour mesurer la rugosité locale d'une surface en terme de force et de direction. À ce niveau, nous avons présenté une méthodologie permettant de mesurer le spectre des singularités $D(h)$: la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes (méthode MMTO). Cette méthode qui a déjà donné de très bons résultats à 1D, se base sur une lecture statistique du squelette de la transformée en ondelettes. La généralisation à 2D a nécessité l'interprétation de l'information angulaire dans la lecture statistique du squelette. Dans un premier temps, nous avons testé cette méthode sur des surfaces synthétiques monofractales présentant des propriétés d'invariance d'échelle isotropes ou anisotropes. Les résultats obtenus, en parfait accord avec les prédictions théoriques, apportent la preuve que la méthode MMTO 2D est parfaitement adaptée pour analyser des surfaces rugueuses homogènes. L'étape suivante a consisté à tester cette méthode sur le cas plus général des surfaces synthétiques multifractales. À cette fin, nous avons principalement examiné deux familles de surfaces. La première, déjà connue de la communauté des géophysiciens, résulte de modèles de cascades singulières intégrées fractionnairement [130]. La deuxième, inspirée de la modélisation de signaux de vitesse en turbulence pleinement développée [96, 218, 219], est le fruit d'une méthode de synthèse d'images tout à fait originale et qui consiste à construire la surface suivant un processus de cascade à partir de sa représentation sur une base orthogonale d'ondelettes 2D : c'est le modèle de cascades \mathcal{W} aléatoires. Encore une fois, l'application de la méthode MMTO 2D sur de telles surfaces a donné des résultats indiscernables des prédictions théoriques validant ainsi complètement l'aptitude de cette méthode à mesurer les fluctuations de rugosité d'une surface par le calcul de son spectre des singularités $D(h)$. Nous avons ensuite proposé d'autres lectures possibles du squelette de la transformée en ondelettes. Le calcul du noyau d'autosimilarité G [96, 97, 100, 218] à partir de ce squelette fournit une information précise sur la structure multiplicative des surfaces étudiées. Cette structure hiérarchique ultramétrique a été confirmée par le calcul de fonctions de corrélation espace-échelle [236] sur ce squelette. Nous avons donc présenté et testé des techniques qui permettent de caractériser précisément la structure d'une surface rugueuse à partir du squelette de sa transformée en ondelettes 2D.

Disposant de ces nouveaux outils numériques, nous les avons ensuite utilisés pour analyser des images obtenues dans un cadre expérimental. Le cas qui a retenu notre attention nous a été proposé par la NASA. Il s'agit d'images satellites de nuages Stratocumulus marins. De par leur interaction avec le rayonnement solaire, la compréhension de la structure des nuages est primordiale pour pouvoir proposer des modèles réalistes du climat. Nous avons donc calculé les squelettes des transformées en ondelettes de ces images. L'utilisation de nos nouveaux outils a nécessité une attention très particulière afin de s'affranchir de perturbations éventuelles occasionnées par la présence dans le nuage de rouleaux de

convection (en se limitant à l'étude de la rugosité interne à ces rouleaux) et de structures localisées (des genres de siphons). Il ressort des résultats obtenus que la structure du nuage étudié est clairement multifractale, rejetant ainsi les modèles homogènes actuels de nuages utilisés dans les programmes de prédiction du climat. De plus, nos résultats montrent que la structure hiérarchique de ces nuages peut être raisonnablement modélisée par une cascade \mathcal{W} aléatoire log-normale, ce qui nous a conduit à proposer la mise en œuvre d'un modèle plus réaliste dans les programmes actuels d'évolution climatiques.

Tout ce travail de test et de calibration des méthodes ainsi que leur application aux cas d'école de surfaces rugueuses ou aux nuages, ont fait appel à un effort important au niveau développement algorithmique et logiciel. Le premier chapitre de ce mémoire n'a présenté qu'une partie de ce travail purement informatique. Le résultat de cet effort donne lieu, d'une part à une série d'algorithmes correspondant à chaque étape des analyses et des calculs présentés dans ce mémoire et d'autre part à un ensemble d'outils de manipulation et de visualisation des résultats de ces algorithmes.

En ce qui concerne les concepts, outils numériques et méthodes utilisés, on peut imaginer quelques ouvertures possibles. Ce travail s'est en effet concentré uniquement sur les singularités algébriques sans se préoccuper des singularités oscillantes. Il serait donc intéressant d'étendre les concepts et la méthodologie présentée dans ce mémoire à l'étude de telles singularités comme cela a été amorcé à 1D. Les ondelettes utilisées pour les études que nous avons présentées résultent de dérivations de la fonction Gaussienne isotrope. Bien évidemment, l'utilisation d'autres types d'ondelettes, isotropes comme anisotropes, plus ou moins directionnelles, peut s'avérer plus appropriée à telle ou telle situation et des études dans cette direction méritent d'être menées. Directement inspirés du cas 1D, les concepts et techniques associées au noyau d'autosimilarité, se concentrent sur l'évolution statistique du module \mathcal{M}_ψ indépendamment de l'argument \mathcal{A}_ψ . Il serait très intéressant de revenir sur cette séparation et de proposer un propagateur du vecteur gradient \mathbf{T}_ψ qui permettrait de caractériser des propriétés d'invariance d'échelles anisotropes. En ce qui concerne la synthèse d'image, de nombreuses modifications de la règle de construction des cascades \mathcal{W} aléatoires peuvent être imaginées : changement de base d'ondelettes, introduction de corrélations entre les branches de l'arbre de construction, effet mémoire le long d'une même branche, changement de la structure de cet arbre, ...

Les domaines d'application de la démarche présentée dans ce mémoire sont très variés. Les outils proposés fournissent des informations capitales pour la compréhension des propriétés de surfaces complexes et des mécanismes conduisant à leur formation. Nous tenons à signaler que des travaux sont en cours au CRPP pour étudier la rugosité d'images de mamographie. La motivation de ces études est de permettre un diagnostic médical à partir du « diagnostic multifractal » de ces images : comment distinguer un cas malade d'un cas sain en observant les spectres de singularités des images enregistrées ? Toujours au CRPP, l'application de la méthode MMT0 2D à des surfaces obtenues par des processus d'électrodéposition devrait permettre de comprendre le lien entre la rugosité et les pertes par diffusion lors de la réflexion d'un rayonnement sur cette surface. Au delà de l'étude des surfaces rugueuses, les outils basés sur la lecture du squelette de la transformée en ondelettes sont parfaitement adaptés pour l'étude plus générale d'objets à géométrie fractale

dans le plan. Cela concerne, par exemple, la caractérisation de la structure arborescente d'agrégats ou de réseaux de fractures, pour lesquels l'information angulaire contenue dans le squelette est capitale pour comprendre les mécanisme de croissance de ces objets. Il ne fait aucun doute pour moi, que l'étude statistique de la structure interne des nuages stratocumulus marins effectuée dans ce mémoire sera suivie de nombreuses autres applications de la méthode MMT0 2D dans des domaines très variés des sciences fondamentales et des sciences appliquées.

Références

1. J. Tardieu, *Un Mot Pour Un Autre* (Gallimard, Paris, 1951).
2. B. B. Mandelbrot, *Fractals : Form, Chance and Dimensions* (Freeman, San Francisco, 1977).
3. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco, 1982).
4. K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985).
5. *Random Fluctuations and Pattern Growth*, édité par H. E. Stanley, N. Ostrowski (Kluwer Academic, Dordrecht, 1988).
6. J. Feder, *Fractals* (Pergamon, New York, 1988).
7. T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapour, 1989).
8. *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry : Surfaces, Colloids, Polymers*, édité par D. Avnir (John Wiley and Sons, New York, 1989).
9. F. Family, T. Vicsek, *Dynamics of Fractal Surfaces* (World Scientific, Singapour, 1991).
10. *Fractals and Disordered Systems*, édité par A. Bunde, S. Havlin (Springer Verlag, Berlin, 1991).
11. *Fractal in Natural Science*, édité par T. Vicsek, M. Schlesinger, M. Matsushita (World Scientific, Singapour, 1994).
12. *Fractals in Geoscience and Remote Sensing, Image Understanding Research Series, vol.1, ECSC-EC-EAEC*, édité par G. G. Wilkinson, J. Kanellopoulos, J. Megier (Bruxelles, Luxembourg, 1995).
13. A. L. Barabási, H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
14. *Fractal Aspects of Materials, Material Research Society Symposium Proceeding, Vol. 367*, édité par F. Family, P. Meakin, B. Sapoval, R. Wool (Pittsburg, 1995).
15. B. Sapoval, *Les Fractales* (Aditech, Paris, 1988).
16. *On Growth and Form : Fractal and Non-Fractal Patterns in Physics*, édité par H. E. Stanley, N. Ostrowski (Martinus Nijhof, Dordrecht, 1986).
17. *Fractals in Physics*, édité par L. Pietronero, E. Tosatti (North-Holland, Amsterdam, 1986).
18. *Fractals in Physics, Essays in honour of B.B. Mandelbrot, Physica D, Vol. 38*, édité par A. Aharony, J. Feder (North-Holland, Amsterdam, 1989).
19. B. J. West, *Fractal Physiology and Chaos in Medecine* (World Scientific, Singapour, 1990).
20. U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
21. B. J. West, W. Deering, Phys. Rep. **254**, 1 (1994).

22. A. Grossmann, J. Morlet, S.I.A.M. J. Math. Anal **15**, 723 (1984).
23. A. Grossmann, J. Morlet, dans *Mathematics and Physics, Lectures on Recent Results*, édité par L. Streit (World Scientific, Singapour, 1985), p. 135.
24. P. Goupillaud, A. Grossmann, J. Morlet, *Geoexploration* **23**, 85 (1984).
25. *Wavelets*, édité par J. M. Combes, A. Grossmann, P. Tchamitchian (Springer Verlag, Berlin, 1989).
26. Y. Meyer, *Ondelettes* (Herman, Paris, 1990).
27. *Les Ondelettes en 1989*, édité par P. G. Lemarié (Springer Verlag, Berlin, 1990).
28. *Wavelets and Applications*, édité par Y. Meyer (Springer, Berlin, 1992).
29. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets* (S.I.A.M., Philadelphia, 1992).
30. *Wavelets and Their Applications*, édité par M. B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, L. Raphael (Jones and Barlett, Boston, 1992).
31. C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets* (Academic Press, Boston, 1992).
32. *Progress in Wavelets Analysis and Applications*, édité par Y. Meyer, S. Roques (Editions frontières, Gif-sur-Yvette, 1993).
33. A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, J. F. Muzy, *Ondelettes, Multifractales et Turbulences : de l'ADN aux croissances cristallines* (Diderot Editeur, Art et Sciences, Paris, 1995).
34. *Wavelets : Theory and Applications*, édité par G. Erlebacher, M. Y. Hussaini, L. M. Jameson (Oxford Univ. Press, Oxford, 1996).
35. M. Holschneider, *Wavelets : An Analysis Tool* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1996).
36. S. Mallat, *A Wavelet Tour in Signal Processing* (Academic Press, New York, 1998).
37. B. Torresani, *Analyse Continue par Ondelettes* (Editions de Physique, Les Ulis, 1998).
38. A. Arneodo, dans la Réf. [34], p. 349.
39. T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, B. I. Shraiman, *Phys. Rev. A* **33**, 1141 (1986).
40. P. Collet, J. Lebowitz, A. Porzio, *J. Stat. Phys.* **47**, 609 (1987).
41. G. Paladin, A. Vulpiani, *Phys. Rep.* **156**, 148 (1987).
42. B. B. Mandelbrot, *Fractals and Multifractals : Noise, Turbulence and Galaxies*, Vol. 1 of *Selecta* (Springer Verlag, Berlin, 1989).
43. D. Rand, *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* **9**, 527 (1989).
44. P. Grassberger, R. Badii, A. Politi, *J. Stat. Phys.* **51**, 135 (1988).
45. T. Bohr, T. Tèl, dans *Direction in Chaos, Vol. 2*, édité par B. L. Hao (World Scientific, Singapour, 1988), p. 194.
46. A. Arneodo, E. Bacry, J. F. Muzy, *Physica A* **213**, 232 (1995).
47. J. F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3515 (1991).
48. J. F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **4**, 245 (1994).
49. J. F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, *Phys. Rev. E* **47**, 875 (1993).

50. E. Bacry, J. F. Muzy, A. Arneodo, *J. Stat. Phys.* **70**, 635 (1993).
51. A. Akansu, R. Haddad, *Multiresolution Signal Decomposition* (Academic Press, Boston, 1993).
52. D. C. Champeney, *Fourier Transform And Their Physical Applications* (Academic Press, Londres , New York, 1973).
53. G. Gasquet, P. Witomski, dans *Analyse de Fourier et Applications* (Masson, Paris, 1990).
54. J. Whittaker, *Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics* **33**, (1935).
55. C. E. Shannon, dans *Proc. of the IRE* (1949), Vol. 37, p. 10.
56. J. W. Cooley, J. W. Tukey, *Math. Computation* **19**, 296 (1965).
57. H. J. Nussbaumer, *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms* (Springer Verlag, Berlin, 1982).
58. P. Duhamel, M. Vetterli, *Signal Proc.* **19**, 259 (1990).
59. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986).
60. M. Frigo, S. G. Johnson, dans *ICASSP Conference Proceedings* (1998), Vol. 3, p. 1381.
61. R. Murenzi, thèse, Université de Louvain la Neuve, 1990.
62. R. Murenzi, dans la Réf. [25], p. 239.
63. F. Argoul, A. Arneodo, J. Elezgaray, G. Grasseau, R. Murenzi, *Phys. Rev. A* **41**, 5537 (1990).
64. J. P. Antoine, P. Carette, R. Murenzi, B. Piette, *Signal Processing* **31**, 241 (1993).
65. G. Grasseau, thèse, Université de Bordeaux I, 1989.
66. J. D. Farmer, E. Ott, J. A. Yorke, *Physica D* **7**, 153 (1983).
67. P. Grassberger, I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346 (1983).
68. P. Grassberger, I. Procaccia, *Physica D* **9**, 189 (1983).
69. R. Badii, A. Politi, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1661 (1984).
70. R. Badii, A. Politi, *J. Stat. Phys.* **40**, 725 (1985).
71. L. V. Meisel, M. Jonhson, P. J. Cote, *Phys. Rev. A* **45**, 6989 (1992).
72. *The Science of Fractal Images*, édité par H. O. Peitgen, D. Saupe (Springer Verlag, New York, 1987).
73. R. F. Voss, *Physica D* **38**, 362 (1989).
74. G. A. Edgard, *Measures, Topology anf Fractal Geometry* (Springer Verlag, Berlin, 1990).
75. B. Dubuc, J. F. Quiniou, C. Roques-Carmes, C. Tricot, S. W. Zucker, *Phys. Rev. A* **39**, 1500 (1989).
76. T. Higuchi, *Physica D* **46**, 254 (1990).
77. N. P. Greis, H. P. Greenside, *Phys. Rev. A* **44**, 2324 (1991).
78. W. Li, *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **1**, 583 (1991).
79. J. Schmittbuhl, J. P. Violette, S. Roux, *Phys. Rev. E* **51**, 131 (1995).
80. A. Scotti, C. Meneveau, S. G. Saddinghi, *Phys. Rev. E* **51**, 5594 (1995).

81. B. Lea-Cox, J. S. Y. Wang, *Fractals* **1**, 87 (1993).
82. C. K. Peng, S. V. Buldyrev, M. Simons, H. E. Stanley, A. L. Goldberger, *Phys. Rev. E* **49**, 1685 (1994).
83. M. S. Taqqu, V. Teverovsky, W. Willinger, *Fractals* **3**, 785 (1995).
84. A. R. Mehrabi, H. Rassamdana, M. Sahimi, *Phys. Rev. E* **56**, 712 (1997).
85. B. Pilgram, D. T. Kaplan, *Physica D* **114**, 108 (1998).
86. G. Parisi, U. Frisch, dans *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics, Proc. of Int. School*, édité par M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi (North-Holland, Amsterdam, 1985), p. 84.
87. A. S. Monin, A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* (MIT Press, Cambridge, MA, 1975), Vol. 2.
88. A. L. Barabási, T. Vicsek, *Phys. Rev. A* **44**, 2730 (1991).
89. A. L. Barabási, P. Széfalusy, T. Vicsek, *Physica A* **178**, 17 (1991).
90. S. Mallat, S. Zhong, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **14**, 710 (1992).
91. S. Mallat, W. L. Hwang, *IEEE Trans. on Information Theory* **38**, 617 (1992).
92. S. Jaffard, *SIAM J. Math. Anal.* **28**, 944 (1997).
93. H. G. E. Hentschel, *Phys. Rev. E* **50**, 243 (1994).
94. S. F. Edwards, P. W. Anderson, *J. Phys. F* **5**, 965 (1975).
95. J. F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, dans la Réf. [32], p. 323.
96. A. Arneodo, J. F. Muzy, S. G. Roux, *J. Phys. II France* **7**, 363 (1997).
97. A. Arneodo, S. Manneville, J. F. Muzy, *Eur. Phys. J. B* **1**, 129 (1998).
98. A. Arneodo, B. Audit, E. Bacry, S. Manneville, J. F. Muzy, S. G. Roux, *Physica A* **254**, 24 (1998).
99. S. G. Roux, J. F. Muzy, A. Arneodo, *Eur. Phys. J. B* **8**, 301 (1999).
100. A. Arneodo, S. Manneville, J. F. Muzy, S. G. Roux, *Phil. Trans. R. Soc. London A* (1999), à paraître.
101. A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. F. Muzy, M. Tabard, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3456 (1992).
102. A. Arneodo, F. Argoul, J. F. Muzy, M. Tabard, *Phys. Lett. A* **171**, 31 (1992).
103. A. Arneodo, F. Argoul, J. F. Muzy, M. Tabard, *Physica A* **188**, 217 (1992).
104. A. Arneodo, F. Argoul, J. F. Muzy, M. Tabard, E. Bacry, *Fractals* **1**, 629 (1993).
105. A. Khun, F. Argoul, J. F. Muzy, A. Arneodo, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2998 (1994).
106. A. Arneodo, E. Bacry, P. V. Graves, J. F. Muzy, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3293 (1995).
107. A. Arneodo, Y. Daubenton-Carafa, E. Bacry, P. V. Graves, J. F. Muzy, C. Thermes, *Physica D* **96**, 291 (1996).
108. A. Arneodo, Y. Daubenton-Carafa, B. Audit, E. Bacry, J. F. Muzy, C. Thermes, *Eur. Phys. J. B* **1**, 259 (1998).
109. A. Arneodo, Y. Daubenton-Carafa, B. Audit, E. Bacry, J. F. Muzy, C. Thermes, *Physica A* **249**, 439 (1998).

110. A. Arneodo, J. P. Bouchaud, R. Cont, J. F. Muzy, M. Potters, D. Sornette, préirage cond-mat/9607120 at <http://xxx.lanl.gov> .
111. A. Arneodo, J. F. Muzy, D. Sornette, *Eur. Phys. J. B* **2**, 277 (1998).
112. A. Arneodo, E. Bacry, J. F. Muzy, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4823 (1995).
113. A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, J. F. Muzy, *J. Stat. Phys.* **87**, 179 (1997).
114. A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, J. F. Muzy, *J. of Fourier Analysis and Applications* **4**, 159 (1998).
115. A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, J. F. Muzy, *CRM Proceedings and Lecture Notes* **18**, 315 (1999).
116. J. C. Vassilicos, J. C. Hunt, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **435**, 505 (1991).
117. E. Freysz, B. Pouligny, F. Argoul, A. Arneodo, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 745 (1990).
118. A. Arneodo, F. Argoul, J. F. Muzy, B. Pouligny, E. Freysz, dans la Réf. [30], p. 241.
119. J. Canny, *IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell.* **8**, 679 (1986).
120. J. Arrault, A. Arneodo, A. Davis, A. Marshak, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 75 (1997).
121. J. P. Antoine, R. Murenzi, *Signal Processing* **52**, 259 (1996).
122. J. Arrault, thèse, Université de Bordeaux I, 1995.
123. J. Arrault, B. Pouligny, *J. Phys. I France* **6**, 431 (1996).
124. F. Argoul, A. Arneodo, J. Elezgaray, G. Grasseau, R. Murenzi, *Phys. Lett. A* **135**, 327 (1989).
125. J. P. Antoine, R. Murenzi, B. Piette, M. Duval-Destin, dans la Réf. [28], p. 144.
126. T. Dallard, G. R. Spedding, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **12**, 107 (1993).
127. D. Marr, *Vision* (W. H. Freeman and Co, San-Francisco, 1982).
128. A. Rosenfeld, M. Thurston, *IEEE Trans. Comput. C* **29** (1971).
129. A. Arneodo, N. Decoster, S. G. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1255 (1999).
130. D. Schertzer, S. Lovejoy, *J. Geophys. Res.* **92**, 9693 (1987).
131. D. Schertzer, S. Lovejoy, *Phys. Chem. Hyd. J.* **6**, 623 (1985).
132. S. Lovejoy, D. Schertzer, dans la Réf. [12], p. 102.
133. D. Schertzer, S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Ghigisinskaya, D. Marsan, *Fractals* **5**, 427 (1997).
134. Y. Meyer, préirage , Ecole Polytechnique (1994).
135. M. Ben Slimane, thèse, E.N.P.C., France, 1996.
136. E. Bacry, A. Arneodo, U. Frisch, Y. Gagne, E. Hopfinger, dans *Turbulence and Coherent Structures*, édité par M. Lesieur, O. Metais (Kluwer, Dordrecht, 1991), p. 203.
137. M. Vergassola, R. Benzi, L. Biferale, D. Pisarenko, *J. Phys. A* **26**, 6093 (1993).
138. M. Vergassola, U. Frisch, *Physica D* **54**, 58 (1991).
139. R. Badii, thèse, Université de Zurich, 1987.
140. P. Cvitanovic, dans *Proc. Group Theoretical Methods in Physics*, édité par R. Gilmore (World Scientific, Singapour, 1987).

141. M. J. Feigenbaum, M. H. Jensen, I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **57**, 1503 (1986).
142. M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, Phys. Rev. A **36**, 1409 (1987).
143. A. B. Chhabra, R. V. Jensen, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. A **40**, 4593 (1989).
144. A. B. Chhabra, R. V. Jensen, Phys. Rev. Lett. **62**, 1327 (1989).
145. A. B. Chhabra, C. Meneveau, R. V. Jensen, K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. A **40**, 5284 (1989).
146. G. Ouillon, D. Sornette, C. Castaing, Nonlin. Proc. Geophys. **2**, 158 (1995).
147. G. Ouillon, C. Castaing, D. Sornette, J. Geophys Res. **101**, 5477 (1996).
148. P. Gaillot, J. Darrozes, M. de Saint Blanquat, G. Ouillon, Geophys. Res. Lett. **24**, 1819 (1997).
149. B. B. Mandelbrot, J. W. Van Ness, S.I.A.M. Rev. **10**, 422 (1968).
150. P. Flandrin, IEEE Trans. on Info. Theory **35**, 197 (1989).
151. P. Flandrin, IEEE Trans. on Info. Theory **38**, 910 (1992).
152. P. Flandrin, *Temps-Fréquence* (Hermès, Paris, 1993).
153. E. Masry, IEEE Trans. on Info. Theory **39**, 260 (1993).
154. P. Abry, P. Goncalvès, P. Flandrin, Lectures Note in Statistics **105**, 15 (1995).
155. P. Abry, *Ondelettes et Turbulence - Multirésolution, Algorithmes de Décomposition, Invariance d'Echelles et Signaux de Pression* (Diderot Editeur, Arts et Sciences, Paris, 1997).
156. J. Beran, *Statistics for Long-Memory Process* (Chapman & Hall, New York, 1994).
157. G. Wornell, A. V. Oppenheim, IEEE Trans. on Signal Proc. **40**, 611 (1992).
158. R. F. Peltier, J. Levy Véhel, INRIA report n° 2396 (1994).
159. P. Abry, D. Veitch, IEEE Trans. on Info. Theory **44**, 2 (1998).
160. P. Abry, D. Veitch, P. Flandrin, Journal of Time Series Analysis **19**, 253 (1998).
161. L. Delbeke, P. Abry, Applied and Computational Harmonic Analysis (1998), à paraître.
162. D. Veitch, P. Abry, IEEE Trans. on Info. Theory (1998), à paraître.
163. P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, D. Veitch, dans *Self-Similarity in Network Traffic*, édité par K. Parks, W. Willinger (John Wiley and Sons, New York, 1998).
164. A. H. Tewfik, M. Kim, IEEE Trans. on Info. Theory **38**, 904 (1992).
165. J. Pando, L. Z. Fang, Phys. Rev. E **57**, 3593 (1998).
166. I. Simonsen, A. Hansen, O. M. Nes, Phys. Rev. E **58**, 2779 (1998).
167. C. L. Jones, G. T. Loneragan, D. E. Mainwaring, J. Phys. A : Math. Gen. **29**, 2509 (1996).
168. R. F. Voss, dans *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*, édité par R. A. Earnshaw, *NATO Advanced Study Institute, Series E : Applied Science, Vol. 17* (Springer Verlag, Heidelberg, 1985), p. 805.
169. F. Sellan, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I : Math. **321**, 351 (1995).
170. E. Masry, Applied and Computational Harmonic Analysis **3**, 239 (1996).
171. P. Abry, F. Sellan, Applied and Computational Harmonic Analysis **3**, 377 (1996).

172. C. Henegan, S. B. Lowen, M. C. Teich, dans *Proc. IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpretation, San Antonio* (1996).
173. B. Audit, E. Bacry, J. F. Muzy, A. Arneodo, pré tirage (1999).
174. P. Lévy, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien* (Gauthier-Villars, Paris, 1965).
175. F. Plouraboué, P. Kurowski, J. P. Hulin, S. Roux, *Phys. Rev. E* **51**, 1675 (1995).
176. B. Pesquet-Popescu, P. Larzabal, dans *Fractals in Engineering*, édité par J. Lévy-Véhel, E. Lutton, C. Tricot (Springer Verlag, Londres, 1997).
177. J. Lévy-Véhel, *Fractals* **3**, 755 (1995).
178. J. Lévy-Véhel, dans la Réf. [12], p. 85.
179. R. R. Coifman, F. Majid, dans la Réf. [32], p. 63.
180. D. Donoho, *J. of Appl. and Comput. Harmonic Analysis* **1**, 100 (1993).
181. D. Donoho, dans la Réf. [32], p. 109.
182. D. Donoho, I. Johnstone, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* **319**, 1317 (1994).
183. D. Donoho, I. Johnstone, *Biometrika* **81**, 425 (1994).
184. D. Donoho, I. Johnstone, G. Kerkyachanan, D. Picard, *J. of Royal Stat. Soc. B* **57**, 301 (1995).
185. C. Meneveau, K. R. Sreenivasan, *J. Fluid. Mech.* **224**, 429 (1991).
186. L. Richardson, *Proc. R. Soc. London, Ser A* **110**, 709 (1926).
187. B. B. Mandelbrot, *J. Fluid Mech.* **62**, 331 (1974).
188. U. Frisch, S. Orzag, *Physics Today*, 24 (1990).
189. *Turbulence : A Tentative Dictionary*, édité par P. Tabeling, O. Cardoso (Plenum, New York, 1995).
190. A. N. Kolmogorov, *C. R. Acad. Sci. USSR* **30**, 301 (1941).
191. A. N. Kolmogorov, *J. Fluid Mech.* **13**, 82 (1962).
192. A. M. Obukhov, *J. Fluid Mech.* **13**, 77 (1962).
193. R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi, A. Vulpiani, *J. Phys. A* **17**, 3521 (1984).
194. D. Schertzer, S. Lovejoy, dans *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, édité par T. Tatsumi (North-Holland, Amsterdam, 1984), p. 505.
195. C. Meneveau, K. R. Sreenivasan, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1424 (1987).
196. S. Kida, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60**, 5 (1990).
197. E. A. Novikov, *Phys. Fluids A* **2**, 814 (1990).
198. B. Dubrulle, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 959 (1994).
199. E. A. Novikov, *Phys. Rev. E* **50**, 3303 (1995).
200. Z. S. She, E. C. Waymire, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 262 (1995).
201. B. Castaing, B. Dubrulle, *J. Phys. II France* **5**, 895 (1995).
202. B. Dubrulle, *J. Phys. II France* **6**, 1825 (1996).
203. Z. S. She, E. Leveque, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336 (1994).

204. A. Arneodo, F. Argoul, J. Elezgaray, G. Grasseau, dans *Nonlinear Dynamics*, édité par G. Turchetti (World Scientific, Singapour, 1989), p. 130.
205. A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, E. Freysz, G. Grasseau, J. F. Muzy, B. Pouligny, dans *Wavelets and Applications*, édité par Y. Meyer (Masson & Springer Verlag, Paris & Berlin, 1992), p. 286.
206. D. Sornette, dans *Scale Invariance and Beyond*, édité par B. Dubrulle, F. Graner, D. Sornette (EDP Sciences & Springer Verlag, Les Ulis & Berlin, 1997), p. 235.
207. B. B. Mandelbrot, C. R. Acad. Sci. Paris Ser A **278**, 289 (1974).
208. B. B. Mandelbrot, C. R. Acad. Sci. Paris Ser A **278**, 355 (1974).
209. J. P. Kahane, J. Peyrière, *Advances in Mathematics* **22**, 131 (1976).
210. G. M. Molchan, *Comm. Math. Phys.* **179**, 681 (1996).
211. A. Marshak, A. Davis, R. Cahalan, W. Wiscombe, *Phys. Rev. E* **49**, 55 (1994).
212. T. Vicsek, A. L. Barabási, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**, L845 (1991).
213. J. Eggers, S. Grossmann, *Phys. Rev. A* **45**, 2360 (1992).
214. J. A. C. Humphrey, C. A. Schuler, B. Rubinski, *Fluid Dyn. Res.* **9**, 81 (1992).
215. A. Juneja, D. P. Lathrop, K. R. Sreenivasan, G. Stolovitzky, *Phys. Rev. E* **49**, 5179 (1994).
216. L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. Crisanti, A. Vulpiani, *Phys. Rev. E* **57**, R6261 (1998).
217. R. Benzi, L. Biferale, A. Crisanti, G. Paladin, M. Vergassola, A. Vulpiani, *Physica D* **65**, 352 (1993).
218. S. G. Roux, thèse, Université d'Aix-Marseille II, 1996.
219. A. Arneodo, E. Bacry, J. F. Muzy, *J. Math. Phys.* **39**, 4142 (1998).
220. D. Schertzer, S. Lovejoy, dans *Fractals: Their Physical Origin and Properties*, édité par L. Pietronero (Plenum, New York, 1989), p. 49.
221. J. Wilson, D. Schertzer, S. Lovejoy, dans *Scaling, Fractals and Nonlinear Variability in Geophysics*, édité par D. Schertzer, S. Lovejoy (Kluwer, Dordrecht, 1991), p. 185.
222. A. Marshak, A. Davis, W. J. Wiscombe, G. Titov, *Remote Sens. Environ.* **52**, 72 (1995).
223. A. Davis, A. Marshak, W. J. Wiscombe, R. F. Cahalan, dans *Current Topics in Nonstationary Analysis*, édité par G. Treviño *et al.* (World Scientific, Singapour, 1996), p. 97.
224. B. Castaing, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, *Physica D* **46**, 177 (1990).
225. B. Castaing, Y. Gagne, M. Marchand, *Physica D* **68**, 387 (1993).
226. Y. Gagne, M. Marchand, B. Castaing, *J. Phys. II France* **4**, 1 (1994).
227. A. Naert, L. Puech, B. Chabaud, J. Peintke, B. Castaing, B. Hebral, *J. Phys. II France* **4**, 215 (1994).
228. B. Chabaud, A. Naert, J. Peintke, F. Chillà, B. Castaing, B. Hebral, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3227 (1994).
229. F. Chillà, J. Peintke, B. Castaing, *J. Phys. II France* **6**, 455 (1996).
230. Y. Malécot, C. Auriault, H. Kahalerras, Y. Gagne, O. Chanal, B. Chabaud, B. Castaing, *J. Fluid Mech.* (1999), à paraître.

231. Y. Gagne, thèse, Université de Grenoble, 1987.
232. P. Kailasnath, K. R. Sreenivasan, G. Stolovitzky, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2766 (1992).
233. P. Tabeling, G. Zocchi, F. Belin, J. Maurer, H. Willaime, *Phys. Rev. E* **53**, 1613 (1996).
234. F. Belin, P. Tabeling, H. Willaime, *Physica D* **93**, 52 (1996).
235. A. Arneodo, S. Manneville, J. F. Muzy, S. G. Roux, *Applied and Computational Harmonic Analysis* **6**, 374 (1999).
236. A. Arneodo, E. Bacry, S. Manneville, J. F. Muzy, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 708 (1998).
237. M. Greiner, J. Giesemann, P. Lipa, P. Carruthers, *Z. Phys. C* **69**, 305 (1996).
238. M. Greiner, J. Giesemann, P. Lipa, *Phys. Rev. E* **56**, 4263 (1997).
239. A. Davis, A. Marshak, R. F. Cahalan, W. J. Wiscombe, *J. Atmos. Sci.* **54**, 241 (1997).
240. M. Basseville, A. Benveniste, K. C. Chou, S. A. Golden, R. Nikoukhah, A. S. Willsky, *IEEE Trans. Inform. Theory* **38**, 766 (1992).
241. M. E. Cates, J. M. Deutsch, *Phys. Rev. A* **35**, 4907 (1987).
242. A. P. Siebesma, dans *Universality in Condensed Matter*, édité par R. Julien, L. Peliti, R. Rammal, N. Boccarra (Springer Verlag, Heidelberg, 1988), p. 188.
243. J. O'Neil, C. Meneveau, *Phys. Fluids A* **5**, 158 (1993).
244. S. Lovejoy, *Science* **216**, 185 (1982).
245. R. F. Cahalan, dans *Advances in Remote Sensing and Retrieval Methods*, édité par A. Deepak, H. Fleming, J. Theon (Deepak Pub, Hampton, 1989), p. 371.
246. A. Davis, A. Marshak, R. F. Cahalan, W. J. Wiscombe, preprint (1997).
247. V. Ramanatahn, R. D. Cess, E. F. Harrison, P. Minnis, B. R. Barkston, E. Ahmad, D. Hartmann, *Science* **243**, 57 (1989).
248. R. D. Cess *et al.*, *Science* **245**, 513 (1989).
249. F. S. Rys, A. Waldvogel, dans *Fractal in Physics*, édité par L. Pietronero, E. Tosatti (North-Holland, Amsterdam, 1986), p. 461.
250. R. M. Welch, B. A. Wielicki, *Clim. Appl. Meteorol.* **25**, 261 (1986).
251. J. I. Yano, Y. Takeuchi, *J. Meteor. Soc. Japan* **65**, 661 (1987).
252. R. M. Welch, K. S. Kuo, B. A. Wielicki, S. K. Sengupta, L. Parker, *J. Appl. Meteorol.* **27**, 341 (1988).
253. R. F. Cahalan, J. H. Joseph, *Mon. Wea. Rev.* **117**, 261 (1989).
254. G. Sèze, L. Smith, dans *Proc. Seventh Conf. on Atmospheric Radiation, Amer. Meteor. Soc., San Francisco, CA* (1990), p. 47.
255. A. Davis, S. Lovejoy, D. Schertzer, dans *Scaling, Fractals and Nonlinear Variability in Geophysics*, édité par S. Lovejoy, D. Schertzer (Kluwer, Dordrecht, 1991), p. 303.
256. Y. Tessier, S. Lovejoy, D. Schertzer, *J. Appl. Meteorol.* **32**, 223 (1993).
257. A. Davis, A. Marshak, W. J. Wiscombe, R. F. Cahalan, *J. Geophys. Res.* **99**, 8055 (1994).
258. L. M. Romanova, *Izv. Acad. Sci. USSR Atmos. Oceanic Phys.* **11**, 509 (1975).
259. H. W. Baker, J. A. Davies, *Remote Sens. Environ.* **42**, 51 (1992).

260. A. Davis, thèse, McGill University, Montreal, 1992.
261. R. F. Cahalan, W. Ridgway, W. J. Wiscombe, T. L. Bell, J. B. Snider, *J. Atmos. Sci* **51**, 2434 (1994).
262. R. D. Cess, M. H. Zhang, Y. Zhou, X. Jing, V. Dvortsov, *J. Geophys. Res.* **101**, 23299 (1996).
263. S. Cox, D. McDougal, D. Randall, R. Schiffer, *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **68**, 114 (1987).
264. B. A. Albrecht, C. S. Bretherton, D. Jonhson, W. H. Schubert, A. S. Frisch, *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **76**, 889 (1995).
265. R. Boers, J. B. Jensen, P. B. Krummel, H. Gerber, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **122**, 1307 (1996).
266. W. D. King, C. T. Maher, G. A. Hepburn, *J. Appl. Meteor.* **20**, 195 (1981).
267. C. Duroure, B. Guillemet, *Atm. Res.* **25**, 331 (1990).
268. B. Baker, *J. Atmos. Sci.* **49**, 387 (1992).
269. S. P. Malinowski, I. Zawadski, *J. Atmos. Sci.* **50**, 5 (1993).
270. A. V. Korolev, I. P. Mazin, *J. Appl. Meteorol.* **32**, 760 (1993).
271. S. P. Malinowski, M. Y. Leclerc, D. G. Baumgardner, *J. Atmos. Sci.* **51**, 397 (1994).
272. A. Davis, A. Marshak, W. J. Wiscombe, R. F. Cahalan, *J. Atmos. Sci.* **53**, 1538 (1996).
273. A. Marshak, A. Davis, W. J. Wiscombe, R. F. Cahalan, *J. Atmos. Sci.* **54**, 1423 (1997).
274. R. F. Cahalan, J. B. Snider, *Remote Sens. Environ.* **28**, 95 (1989).
275. S. Lovejoy, D. Schertzer, P. Silas, Y. Tessier, D. Lavallée, *Ann. Geophysicae* **11**, 119 (1993).
276. S. M. Gollmer, M. Harshvardan, R. F. Cahalan, J. S. Snider, *J. Atmos. Sci.* **52**, 3013 (1995).
277. W. J. Wiscombe, A. Davis, A. Marshak, R. F. Cahalan, dans *Proc. of the Fourth Atmospheric Radiation Measurement (ARM) Science Team Meeting, Charleston, U.S. Dept. of Energy* (1995), p. 11.
278. A. Davis, A. Marshak, H. Gerber, W. J. Wiscombe, *J. Geophys. Res.* (1998), à paraître.
279. S. Corssin, *J. Appl. Phys.* **22**, 469 (1951).
280. A. Obukhov, *Izv. Akad. Naut. SSSR, Ser. Geogr. I. Geofiz.* **13**, 55 (1949).
281. R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
282. D. Schertzer, S. Lovejoy, dans la Réf. [12], p. 11.
283. A. Davis, A. Marshak, W. J. Wiscombe, R. F. Cahalan, dans *Proc. of the 2nd Workshop on Nonstationary Random Processes and Their Applications* (1995), pré tirage.
284. K. Stamnes, S.-C. Tsay, W. J. Wiscombe, K. Jayaweera, *Applied Optics* **27**, 2502 (1988).
285. R. F. Cahalan, W. Ridgway, W. J. Wiscombe, S. Gollmer, M. Harshvardan, *J. Atmos. Sci* **51**, 3776 (1994).
286. A. Marshak, A. Davis, W. J. Wiscombe, R. F. Cahalan, *J. Geophys. Res.* **100**, 26247 (1995).
287. M. Tiedke, *Mon. Wea. Res.* **124**, 745 (1996).
288. R. F. Cahalan, M. Nestler, W. Ridgway, W. J. Wiscombe, T. L. Bell, dans *Proc. of the 4th International Meeting on Statistical Climatology*, édité par J. Sansom (New Zealand Meteorological Service, Wellington, 1990), p. 28.

289. M. Harshvardan, B. A. Wielicki, K. M. Ginger, *J. of Climate* **7**, 1987 (1994).
290. A. Davis, S. Lovejoy, D. Schertzer, *SPIE Proceedings* **1558**, 37 (1991).
291. R. G. Giovanelli, *Aust. J. Phys.* **12**, 164 (1959).
292. G. L. Stephens, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **36**, 51 (1986).
293. K. F. Evans, *J. Atmos. Sci.* **50**, 3111 (1993).
294. S. Lovejoy, A. Davis *et al.*, *J. Geophys. Res.* **D 95**, 11699 (1990).
295. S. Douady, Y. Couder, M. E. Brachet, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 983 (1991).
296. O. Cadot, S. Douady, Y. Couder, *Phys. Fluids* **7**, 630 (1995).
297. O. Cadot, thèse, Université de Paris VII, 1995.
298. S. Fauve, C. Laroche, B. Castaing, *J. Phys. II France* **3**, 271 (1993).
299. P. Abry, S. Fauve, P. Flandrin, C. Laroche, *J. Phys. II France* **4**, 725 (1994).
300. P. Abry, thèse, Université de Lyon I, 1994.
301. P. Chainais, P. Abry, J. F. Pinton, *prétirage* (1998).
302. G. Ruiz-Chavarria, C. Baudet, S. Ciliberto, *Physica D* **99**, 369 (1996).